Ortaöğretim

# Matematik

## Ders Kitabı

# 10

MİRAY YAYINLARI

ORTAÖĞRETİM

# MATEMATİK

## DERS KİTABI

# 10

Nesibe AYDIN

Betül BİBEROĞLU ABAZAOĞLU

Bu kitap, Millî Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı'nın **18.04.2019** tarih ve **8** sayılı Kurul kararıyla *(listenin 52. sırasında)* **2019 – 2020** öğretim yılından itibaren 5 (beş) yıl süreyle **ders kitabı** olarak kabul edilmiştir.

**MİRAY EĞİTİM HİZMETLERİ YAYINCILIK İNŞAAT TURİZM SANAYİ VE TİCARET LİMİTED ŞİRKETİ**

Haymana Yolu 5. km. Karşıyaka Mah. 577. Sk. No.: 1 Gölbaşı / ANKARA

tel.: 0 312. 498 25 25 • belgeç: 0 312. 498 24 46

www.mirayyayincilik.com.tr

Sertifika No.: 41263

Bu kitabın her hakkı saklıdır ve MİRAY EĞİTİM HİZMETLERİ YAYINCILIK İNŞAAT TURİZM SANAYİ VE TİCARET LİMİTED ŞİRKETİ'ne aittir.

Kitabın düzeni, metni, soru ve şekilleri kısmen de olsa hiçbir şekilde alınıp yayımlanamaz.

ISBN

978-625-6412-23-1

•

DİL UZMANI

Helin REÇBER

•

GÖRSEL TASARIM UZMANI

Bora SENGER

•

BASKI

# İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif Ersoy

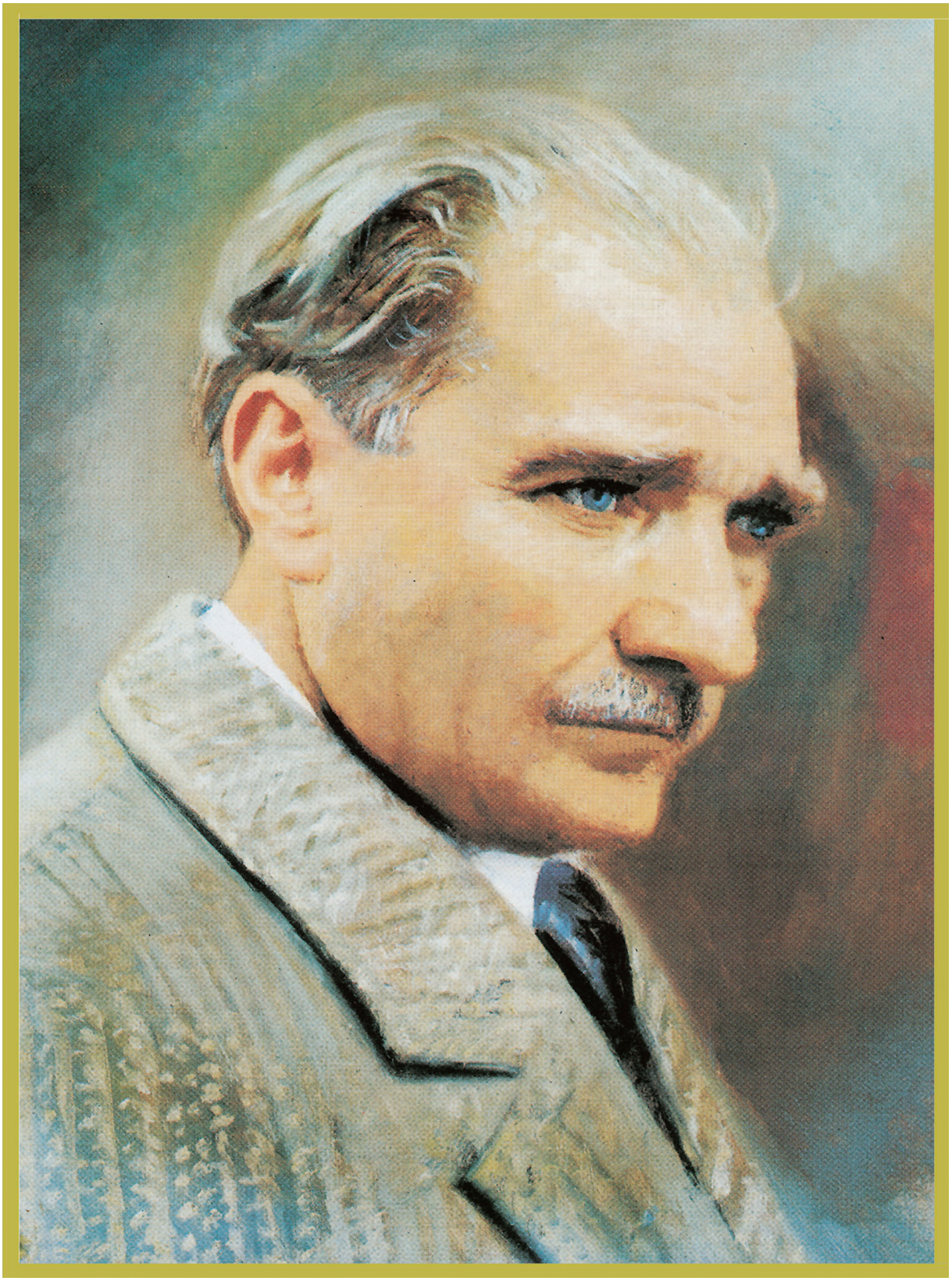
## GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



**Mustafa Kemal ATATÜRK**

# SEMBOLLER

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\in$ | elemanıdır | $f: A \to B,\ A \xrightarrow{f} B$ | A'dan B'ye f fonksiyonu |
| $\notin$ | elemanı değildir | $P(x)$ | $P(x)$ polinomu |
| $\varnothing, \{\}$ | boş küme | $der[P(x)]$ | $P(x)$ polinomunun derecesi |
| $A - B$ | A fark B | $\widehat{ABC}$ | ABC üçgeni |
| $A'$ | A kümesinin / olayının tümleyeni | $\widehat{ABC}$ | ABC açısı |
| $\cap$ | kesişim işlemi | $\overset{\frown}{AB}$ | AB yayı |
| $\cup$ | birleşim işlemi | $m(\widehat{ABC})$ | ABC açısının ölçüsü |
| $s(A)$ | A kümesinin eleman sayısı | $m(\overset{\frown}{AB})$ | AB yayının ölçüsü |
| $\mathbb{N}$ | doğal sayılar kümesi | $Ç(\widehat{ABC})$ | ABC üçgeninin çevresi |
| $\mathbb{Z}$ | tam sayılar kümesi | $A(\widehat{ABC})$ | ABC üçgeninin alanı |
| $\mathbb{Q}$ | rasyonel sayılar kümesi | $[AB]$ | AB doğru parçası |
| $\mathbb{Q}'$ | irrasyonel sayılar kümesi | $\lvert AB \rvert$ | AB doğru parçasının uzunluğu |
| $\mathbb{R}$ | gerçek sayılar kümesi | $=$ | eşitlik işareti |
| $\mathbb{R}^+$ | pozitif gerçek sayılar kümesi | $\cong$ | eşlik işareti |
| $\mathbb{C}$ | karmaşık sayılar kümesi | $\neq$ | eşit değildir |
| $i$ | sanal birim | $\approx$ | yaklaşık işareti |
| $<$ | eşitsizlik işareti (küçüktür) | $\backsim$ | benzerlik işareti |
| $\leq$ | eşitsizlik işareti (küçük veya eşittir) | G | ağırlık merkezi |
| $>$ | eşitsizlik işareti (büyüktür) | E | evrensel küme, örnek uzay |
| $\geq$ | eşitsizlik işareti (büyük veya eşittir) | $P(A)$ | A olayının olma olasılığı |
| $\lvert x \rvert$ | x'in mutlak değeri | $\wedge$ | ve |
| $[a, b]$ | kapalı aralık | $\vee$ | veya |
| $(a, b)$ | açık aralık | $\Rightarrow$ | ise |
| $[a, b), (a, b]$ | yarı açık aralık | $\Leftrightarrow$ | ancak ve ancak |
| $x^n$ | x'in n'ninci kuvveti | // | paralellik işareti |
| $n!$ | n faktöriyel | $\perp$ | diklik işareti |
| $P(n, r)$ | n'nin r'li permütasyonu | $A(x, y)$ | A noktasının koordinatları |
| $C(n, r)$ | n'nin r'li kombinasyonu | $\Delta$ | delta işareti |
| $\sqrt{\ }$ | karekök işareti | $-\infty$ | eksi sonsuz işareti |
| $\sqrt[n]{\ }$ | n'ninci dereceden kök işareti | $+\infty$ | artı sonsuz işareti |
| % | yüzde işareti | | |

# İÇİNDEKİLER

## 1. ALT ÖĞRENME ALANI


SAYMA VE OLASILIK ..... 1
Hazır mısınız? ..... 2
KONU 1.1: SIRALAMA VE SEÇME ..... 3
Sayma Yöntemleri ..... 3
Faktöriyel ..... 9
Permütasyon ..... 12
Tekrarlı Permütasyon ..... 16
1.1.1 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI ..... 20
Kombinasyon ..... 24
Pascal Üçeni ..... 30
Binom Açılımı ..... 33
1.1.2 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI ..... 38
KONU 1.2: BASİT OLAYLARIN OLASILIKLARI ..... 40
Olasılık Kavramları ..... 40
Olasılık Hesabı ..... 44
1.2 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI ..... 51
1. ALT ÖĞRENME ALANI TESTİ ..... 52


## 2. ALT ÖĞRENME ALANI


FONKSİYONLAR ..... 56
Hazır mısınız? ..... 57
KONU 2.1: FONKSİYON KAVRAMI VE GÖSTERİMİ ..... 58
Fonksiyon Kavramı ..... 58
Parçalı Fonksiyon ..... 65
Birim (Özdeşlik) Fonksiyon ..... 67
Sabit Fonksiyon ..... 68
Doğrusal Fonksiyon ..... 69
Eşit Fonksiyonlar ..... 70
Çift Fonksiyon, Tek Fonksiyon ..... 71
Bire Bir Fonksiyon ..... 73
Örten Fonksiyon, İçine Fonksiyon ..... 74
2.1.1 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI ..... 77
Fonksiyon Grafikleri ..... 81
Dikey Doğru Testi ..... 82
Doğrusal Fonksiyonların Grafikleri ..... 88
Parçalı Fonksiyonların Grafikleri ..... 92
2.1.2 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI ..... 96
KONU 2.2: İKİ FONKSİYONUN BİLEŞKESİ VE BİR FONKSİYONUN TERSİ ..... 98
Bire Bir ve Örten Fonksiyonlar ..... 98
Fonksiyonlarda Bileşke İşlemi ..... 102
Ters Fonksiyonlar ..... 108
Bir Fonksiyonun Tersinin Grafiği ..... 113
2.2 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI ..... 116
2. ALT ÖĞRENME ALANI SONU TESTİ ..... 117


## 3. ALT ÖĞRENME ALANI


POLİNOM ..... 123
Hazır mısınız? ..... 124
KONU 3.1: POLİNOM KAVRAMI VE POLİNOMLARLA İŞLEMLER ..... 125
Polinom Kavramı ..... 125
Polinomlarla Dört İşlem ..... 129
3.1 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI ..... 141
KONU 3.2: POLİNOMLARIN ÇARPANLARINA AYRILMASI ..... 142
Ortak Çarpan Parantezine Alarak Çarpanlara Ayırma ..... 143
Gruplandırarak Çarpanlara Ayırma ..... 143
Tam Kare Özdeşliğini Kullanarak Çarpanlara Ayırma ..... 146
İki Kare Farkı Özdeşliğini Kullanarak Çarpanlara Ayırma ..... 150
İki Terimin Toplamının ve Farkının Küpü Özdeşliğini Kullanarak Çarpanlara Ayırma ..... 153
İki Terimin Küpünün Toplamı ve Farkı Özdeşliğini Kullanarak Çarpanlara Ayırma ..... 155
$x^2 + bx + c$ ve $ax^2 + bx + c$ Şeklindeki Üç Terimlilerin Çarpanlarına Ayrılması ..... 158
Değişken Değiştirme Yöntemi ile Çarpanlara Ayırma ..... 162
Rasyonel İfadeler ..... 163
3.2 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI ..... 168
3. ALT ÖĞRENME ALANI TESTİ ..... 171

## 4. ALT ÖĞRENME ALANI


İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER ..... 175
Hazır mısınız? ..... 176
KONU 4.1: İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER ..... 177
İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Çözümü ..... 177
İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Köklerinin Varlığı ve Diskriminantı ..... 184
Karmaşık Sayılar ..... 188
İkinci Dereceden Bir Denklemin Kökleri ile Katsayıları Arasındaki İlişki ..... 194
Kökleri Verilen İkinci Dereceden Denklemin Yazılması ..... 195
4.1 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI ..... 197
4. ALT ÖĞRENME ALANI TESTİ ..... 199


## 5. ALT ÖĞRENME ALANI


DÖRTGENLER VE ÇOKGENLER ..... 201
Hazır mısınız? ..... 202
KONU 5.1: ÇOKGENLER ..... 203
5.1 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI ..... 210
KONU 5.2: DÖRTGENLER VE ÖZELLİKLERİ ..... 211
Dörtgen ..... 211
5.2 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI ..... 219
KONU 5.3: ÖZEL DÖRTGENLER ..... 220
Yamuk ..... 220
Yamukta Alan Bağıntıları ..... 227
Paralelkenar ..... 234
Paralelkenarda Alan Bağıntıları ..... 240
Eşkenar Dörtgen ..... 248
Eşkenar Dörtgende Alan Bağıntıları ..... 251
Dikdörtgen ..... 253
Dikdörtgende Alan Bağıntıları ..... 257
Kare ..... 260
Karede Alan Bağıntıları ..... 263
Deltoid ..... 267
Deltoidde Alan Bağıntıları ..... 270
5.3 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI ..... 274
5. ALT ÖĞRENME ALANI TESTİ ..... 276


## 6. ALT ÖĞRENME ALANI


UZAY GEOMETRİ ..... 284
Hazır mısınız? ..... 285
KONU 6.1: KATI CİSİMLER ..... 286
Dik Prizma ve Dik Piramitler ..... 286
6.1 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI ..... 296
6. ALT ÖĞRENME ALANI TESTİ ..... 297
SÖZLÜK ..... 300
CEVAP ANAHTARI ..... 301
KAYNAKÇA ..... 311
GENEL AĞ KAYNAKÇASI ..... 311
GÖRSEL KAYNAKÇA ..... 312

# KİTABIMIZI TANIYALIM

## Hazır mısınız?

**1. Alt Öğrenme Alanı**

**1.** Aşağıdaki ifadeleri en sade şekilde yazınız.

a. $\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}$ b. $\frac{24}{35}:\frac{21}{48}$

c. $\frac{4}{14}:\frac{25}{36}:\frac{49}{15}$ ç. $\frac{12}{28}:\frac{4}{9}:\frac{21}{16}$

**2.** Aşağıdaki ifadeleri ortak çarpan parantezine alma yöntemini kullanarak en sade şekilde yazınız.

a. $\frac{7\cdot13-11\cdot7}{2\cdot5-2\cdot2}$

b. $\frac{15\cdot8-7\cdot15+15\cdot2}{5\cdot9-4\cdot5+5\cdot3}$

**3.** $A = 15\cdot14\cdot13\cdot\ldots\cdot2\cdot1$

$B = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot12\cdot13$

olduğuna göre A, B'nin kaç katıdır?

**4.** Aşağıdaki eşitliklere göre n'nin alabileceği pozitif tam sayı değerlerini bulunuz.

a. $n(n-1)=4\cdot3$

b. $(n-1)(n+1)=3\cdot5$

c. $n(n-1)=30$

ç. $(n-1)(n+1)=35$

**5.** Aşağıdaki eşitliklere göre a'nın alabileceği tam sayı değerlerini bulunuz.

a. $a^2=0$ b. $a^2=2^2$

c. $a^3=2^3$ ç. $(a+3)^2=4$

d. $(a+3)^3=8$ e. $(a+3)^4=16$

**6.** Aşağıdaki ifadeleri en sade şekilde yazınız.

a. $(-1)^5\cdot(-x)^5\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^3$

b. $\left(-\frac{1}{x}\right)^4\cdot(-x^2)^5\cdot(-5)^3$

c. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3\cdot(x^3)^5\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2$

ç. $(x^3)^2\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)^5\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2$

**7.** Bir torbada 8 kırmızı ve 12 mavi top vardır. Torbadan alınan toplar tekrar yerine konularak torbadan 10 kez top çekiliyor.

Buna göre aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına "D", yanlış olanların başına "Y" yazınız.

a. ( ) Daha az sayıda kırmızı top çekildiği kesindir.

b. ( ) Eşit sayıda kırmızı ve mavi top çekilmiş olabilir.

c. ( ) Çekilen toplardan mavi olanlar kesin daha fazladır.

ç. ( ) Mavi top hiç çekilmemiş olabilir.

2

İlgili alt öğrenme alanına başlamadan önce hazır bulunuşluğunuzu belirlemenize yardımcı olacak sorular bu başlık altında verilmiştir.

İlgili konuda neleri öğreneceğinizi gösterir.

Her işlenişin başında konuya merakınızı artıracak bilgi veya sorulara yer verilmiştir.

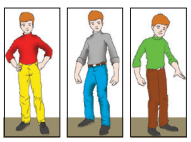
KONU 1.1

## SIRALAMA VE SEÇME

### Sayma Yöntemleri

Yanda da görüldüğü gibi Hakan'ın 3 farklı renkte (kırmızı, gri, yeşil) kazağı ve 3 farklı renkte (sarı, mavi, kahverengi) pantolonu vardır.

Hakan bir pantolon ve bir kazağı kaç farklı şekilde giyebilir?



**Neler Öğreneceğiz?**

- Toplama yöntemi ile saymayı
- Çarpma yöntemi ile saymayı
- Faktöriyeli
- Permütasyonu
- Tekrarlı permütasyonu
- Kombinasyonu
- Pascal ( Paskal ) özdeşliğini
- Binom açılımını

- *$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ birbirinden farklı n küme olsun ve bu kümelerden herhangi ikisinin ortak elemanı olmasın. Bu durumda,* $s(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = s(A_1) + s(A_2) + s(A_3) + \ldots + s(A_n)$*'dir.*
- *Bu şekilde yapılan sayma işlemine toplama yöntemiyle sayma denir.*

*Toplama Yöntemiyle Sayma*

**1. Örnek**

*Tablo:* Üniversitelerdeki Öğrenci Sayıları Özet Tablosu, 2022 – 2023

| Öğretim Alanı | Kadın | Erkek |
|---|---|---|
| Önlisans | 1 361 251 | 1 285 803 |
| Lisans | 1 908 508 | 1 845 587 |
| Yüksek Lisans | 207 304 | 227 181 |
| Doktora | 56 103 | 58 405 |

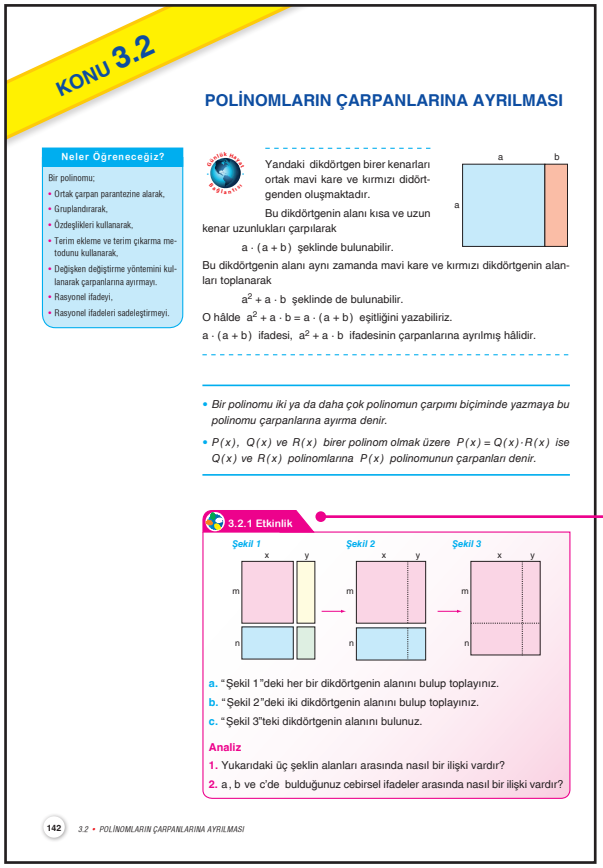
*Genel ağdan alınmıştır.*

Yukarıdaki tablo 2022 – 2023 öğretim yılında üniversite öğrenim düzeyi ve cinsiyete göre Türkiye'de üniversite eğitimi alan öğrenci sayılarını göstermektedir.

**Buna göre 2022 – 2023 öğretim yılında Türkiye'deki üniversitelerde;**

**a. Kaç lisans öğrencisinin öğrenim gördüğünü bulalım.**

**b. Önlisans, lisans ve yüksek lisans düzeyinde öğrenim gören öğrencilerden kaçının erkek olduğunu bulalım.**



KONU 3.2

## POLİNOMLARIN ÇARPANLARINA AYRILMASI

**Neler Öğreneceğiz?**

Bir polinomu;
- Ortak çarpan parantezine alarak,
- Gruplandırarak,
- Özdeşlikleri kullanarak,
- Terim ekleme ve terim çıkarma metodunu kullanarak,
- Değişken değiştirme yöntemini kullanarak çarpanlarına ayırmayı.
- Rasyonel ifadeyi,
- Rasyonel ifadeleri sadeleştirmeyi.

Yandaki dikdörtgen birer kenarları ortak mavi kare ve kırmızı dikdörtgenden oluşmaktadır.

Bu dikdörtgenin alanı kısa ve uzun kenar uzunlukları çarpılarak

$a \cdot (a + b)$ şeklinde bulunabilir.

Bu dikdörtgenin alanı aynı zamanda mavi kare ve kırmızı dikdörtgenin alanları toplanarak

$a^2 + a \cdot b$ şeklinde de bulunabilir.

O hâlde $a^2 + a \cdot b = a \cdot (a + b)$ eşitliğini yazabiliriz.

$a \cdot (a + b)$ ifadesi, $a^2 + a \cdot b$ ifadesinin çarpanlarına ayrılmış hâlidir.

- *Bir polinomu iki ya da daha çok polinomun çarpımı biçiminde yazmaya bu polinomu çarpanlarına ayırma denir.*
- *$P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ birer polinom olmak üzere $P(x) = Q(x) \cdot R(x)$ ise $Q(x)$ ve $R(x)$ polinomlarına $P(x)$ polinomunun çarpanları denir.*

**3.2.1 Etkinlik**

Şekil 1 Şekil 2 Şekil 3

a. "Şekil 1"deki her bir dikdörtgenin alanını bulup toplayınız.

b. "Şekil 2"deki iki dikdörtgenin alanını bulup toplayınız.

c. "Şekil 3"teki dikdörtgenin alanını bulunuz.

**Analiz**

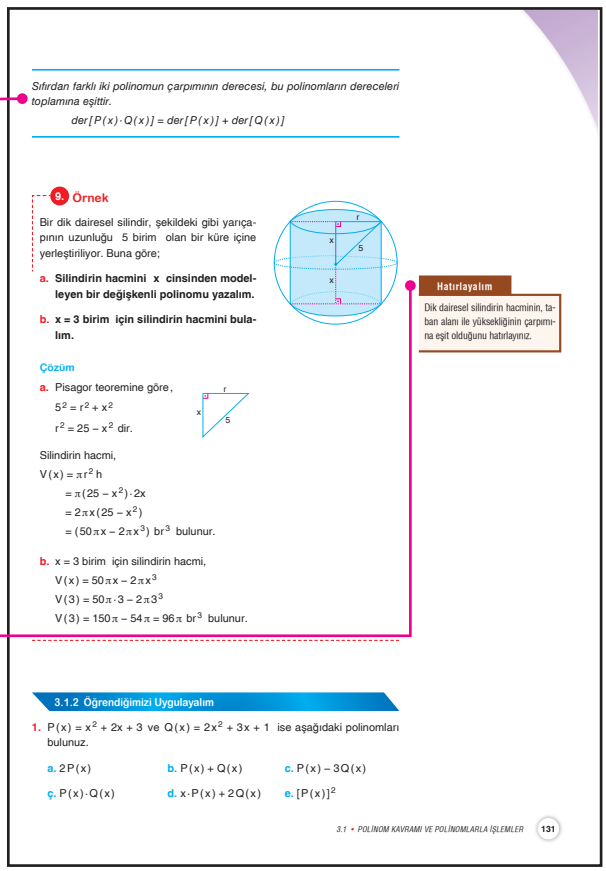
1. Yukarıdaki üç şeklin alanları arasında nasıl bir ilişki vardır?
2. a, b ve c'de bulduğunuz cebirsel ifadeler arasında nasıl bir ilişki vardır?

142 3.2 • POLİNOMLARIN ÇARPANLARINA AYRILMASI

Bu bölümde, tek başınıza yapabileceğiniz, keşfederek öğrenmenizi sağlayacak çeşitli etkinliklere yer verilmiştir. İlgili konudaki etkinlikleri yapmadan önce, o etkinliklerde kullanacağınız "Etkinlik" başlığının altında yer alan araç gereçleri bir gün önceden temin ediniz. Etkinlikleri yaptıktan sonra bulduğunuz sonuçları sınıf arkadaşlarınızla paylaşınız. Arkadaşlarınızın önerilerini dikkate alınız.

Konularla ilgili en önemli özellikleri, kısa açıklamaları ya da dikkat etmeniz gereken noktaları bu bölümde bulabilirsiniz.

Önceki bilgilerinizin hatırlatıldığı bölümdür.



*Sıfırdan farklı iki polinomun çarpımının derecesi, bu polinomların dereceleri toplamına eşittir.*

$der[P(x) \cdot Q(x)] = der[P(x)] + der[Q(x)]$

**9. Örnek**

Bir dik dairesel silindir, şekildeki gibi yarıçapının uzunluğu 5 birim olan bir küre içine yerleştiriliyor. Buna göre;

**a. Silindirin hacmini x cinsinden modelleyen bir değişkenli polinomu yazalım.**

**b. x = 3 birim için silindirin hacmini bulalım.**

**Hatırlayalım**

Dik dairesel silindirin hacminin, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşit olduğunu hatırlayınız.

**Çözüm**

a. Pisagor teoremine göre,

$5^2 = r^2 + x^2$

$r^2 = 25 - x^2$ dir.

Silindirin hacmi,

$V(x) = \pi r^2 h$

$= \pi(25 - x^2) \cdot 2x$

$= 2\pi x(25 - x^2)$

$= (50\pi x - 2\pi x^3)$ br$^3$ bulunur.

b. x = 3 birim için silindirin hacmi,

$V(x) = 50\pi x - 2\pi x^3$

$V(3) = 50\pi \cdot 3 - 2\pi 3^3$

$V(3) = 150\pi - 54\pi = 96\pi$ br$^3$ bulunur.

**3.1.2 Öğrendiğimizi Uygulayalım**

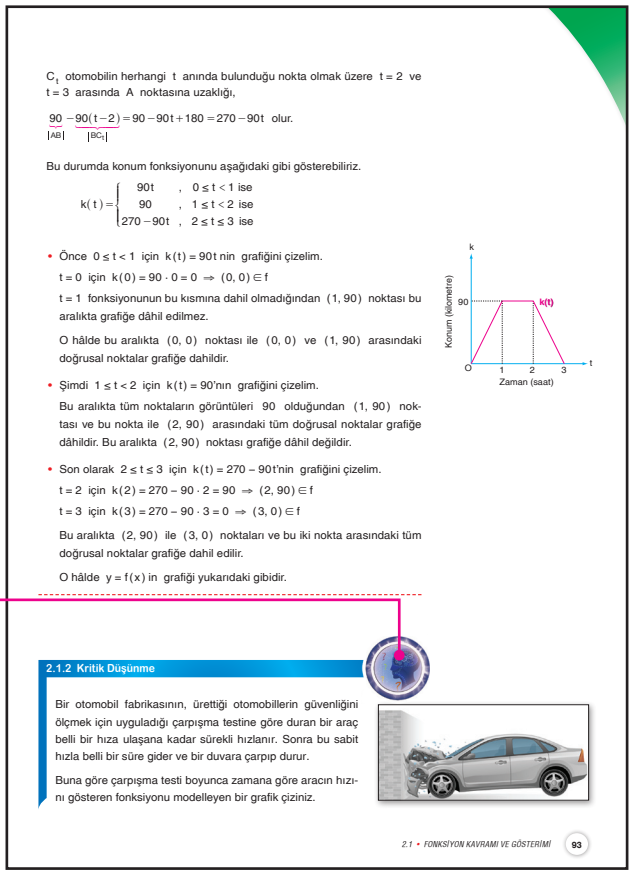
1. $P(x) = x^2 + 2x + 3$ ve $Q(x) = 2x^2 + 3x + 1$ ise aşağıdaki polinomları bulunuz.

a. $2P(x)$ b. $P(x) + Q(x)$ c. $P(x) - 3Q(x)$

ç. $P(x) \cdot Q(x)$ d. $x \cdot P(x) + 2Q(x)$ e. $[P(x)]^2$

3.1 • POLİNOM KAVRAMI VE POLİNOMLARLA İŞLEMLER 131

İşlenen konuyla ilgili düşündürücü soruları içerir.



$C_1$ otomobilin herhangi t anında bulunduğu nokta olmak üzere $t = 2$ ve $t = 3$ arasında A noktasına uzaklığı,

$$\frac{90}{|AB|} \quad \frac{-90(t-2)}{|BC_1|} = 90 - 90t + 180 = 270 - 90t \text{ olur.}$$

Bu durumda konum fonksiyonunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$k(t) = \begin{cases} 90t & , \ 0 \le t < 1 \text{ ise} \\ 90 & , \ 1 \le t < 2 \text{ ise} \\ 270 - 90t & , \ 2 \le t \le 3 \text{ ise} \end{cases}$$

- Önce $0 \le t < 1$ için $k(t) = 90t$ nin grafiğini çizelim.

  $t = 0$ için $k(0) = 90 \cdot 0 = 0 \Rightarrow (0, 0) \in f$

  $t = 1$ fonksiyonunun bu kısmına dahil olmadığından $(1, 90)$ noktası bu aralıkta grafiğe dâhil edilmez.

  O hâlde bu aralıkta $(0, 0)$ noktası ile $(0, 0)$ ve $(1, 90)$ arasındaki doğrusal noktalar grafiğe dahildir.

- Şimdi $1 \le t < 2$ için $k(t) = 90$'nın grafiğini çizelim.

  Bu aralıkta tüm noktaların görüntüleri 90 olduğundan $(1, 90)$ noktası ve bu nokta ile $(2, 90)$ arasındaki tüm doğrusal noktalar grafiğe dâhildir. Bu aralıkta $(2, 90)$ noktası grafiğe dâhil değildir.

- Son olarak $2 \le t \le 3$ için $k(t) = 270 - 90t$'nin grafiğini çizelim.

  $t = 2$ için $k(2) = 270 - 90 \cdot 2 = 90 \Rightarrow (2, 90) \in f$

  $t = 3$ için $k(3) = 270 - 90 \cdot 3 = 0 \Rightarrow (3, 0) \in f$

  Bu aralıkta $(2, 90)$ ile $(3, 0)$ noktaları ve bu iki nokta arasındaki tüm doğrusal noktalar grafiğe dahil edilir.

  O hâlde $y = f(x)$ in grafiği yukarıdaki gibidir.



**2.1.2 Kritik Düşünme**

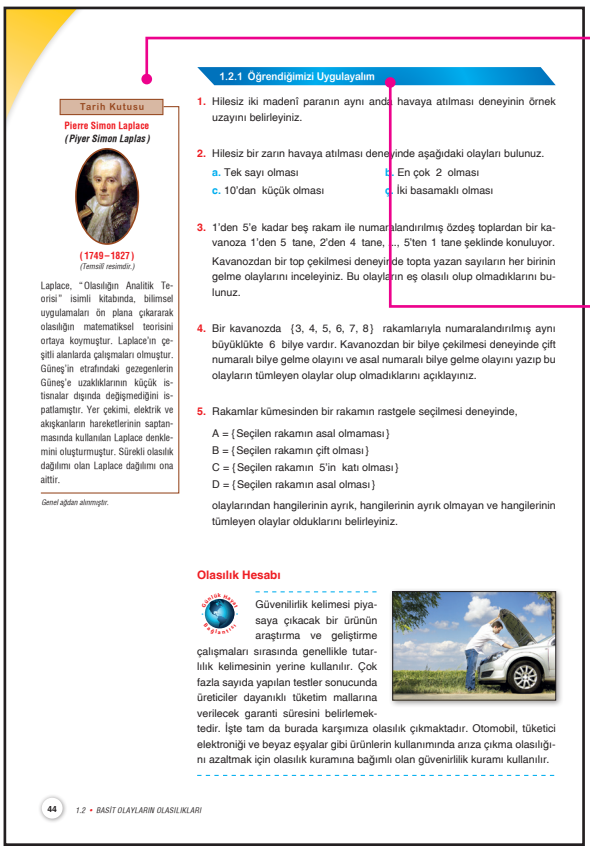
Bir otomobil fabrikasının, ürettiği otomobillerin güvenliğini ölçmek için uyguladığı çarpışma testine göre duran bir araç belli bir hıza ulaşana kadar sürekli hızlanır. Sonra bu sabit hızla belli bir süre gider ve bir duvara çarpıp durur.

Buna göre çarpışma testi boyunca zamana göre aracın hızını gösteren fonksiyonu modelleyen bir grafik çiziniz.





İşlenen konuyla ilgili tarihsel bilgileri içerir.



**Tarih Kutusu**

**Pierre Simon Laplace**
***(Piyer Simon Laplas)***



**(1749 – 1827)**
*(Temsili resimdir.)*

Laplace, "Olasılığın Analitik Teorisi" isimli kitabında, bilimsel uygulamaları ön plana çıkararak olasılığın matematiksel teorisini ortaya koymuştur. Laplace'ın çeşitli alanlarda çalışmaları olmuştur. Güneş'in etrafındaki gezegenlerin Güneş'e uzaklıklarının küçük istisnalar dışında değişmediğini ispatlamıştır. Yer çekimi, elektrik ve akışkanların hareketlerinin saptanmasında kullanılan Laplace denklemini oluşturmuştur. Sürekli olasılık dağılımı olan Laplace dağılımı ona aittir.

*Genel ağdan alınmıştır.*

**1.2.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım**

1. Hilesiz iki madenî paranın aynı anda havaya atılması deneyinin örnek uzayını belirleyiniz.

2. Hilesiz bir zarın havaya atılması deneyinde aşağıdaki olayları bulunuz.
   a. Tek sayı olması
   b. En çok 2 olması
   c. 10'dan küçük olması
   ç. İki basamaklı olması

3. 1'den 5'e kadar beş rakam ile numaralandırılmış özdeş toplardan bir kavanoza 1'den 5 tane, 2'den 4 tane, ..., 5'ten 1 tane şeklinde konuluyor.
   Kavanozdan bir top çekilmesi deneyinde topta yazan sayıların her birinin gelme olaylarını inceleyiniz. Bu olayların eş olasılı olup olmadıklarını bulunuz.

4. Bir kavanozda {3, 4, 5, 6, 7, 8} rakamlarıyla numaralandırılmış aynı büyüklükte 6 bilye vardır. Kavanozdan bir bilye çekilmesi deneyinde çift numaralı bilye gelme olayını ve asal numaralı bilye gelme olayını yazıp bu olayların tümleyen olaylar olup olmadıklarını açıklayınız.

5. Rakamlar kümesinden bir rakamın rastgele seçilmesi deneyinde,
   A = {Seçilen rakamın asal olmaması}
   B = {Seçilen rakamın çift olması}
   C = {Seçilen rakamın 5'in katı olması}
   D = {Seçilen rakamın asal olması}
   olaylarından hangilerinin ayrık, hangilerinin ayrık olmayan ve hangilerinin tümleyen olaylar olduklarını belirleyiniz.

**Olasılık Hesabı**

Güvenilirlik kelimesi piyasaya çıkacak bir ürünün araştırma ve geliştirme çalışmaları sırasında genellikle tutarlılık kelimesinin yerine kullanılır. Çok fazla sayıda yapılan testler sonucunda üreticiler dayanıklı tüketim mallarına verilecek garanti süresini belirlemektedir. İşte tam da burada karşımıza olasılık çıkmaktadır. Otomobil, tüketici elektroniği ve beyaz eşyalar gibi ürünlerin kullanımında arıza çıkma olasılığını azaltmak için olasılık kuramına bağımlı olan güvenirlilik kuramı kullanılır.





Öğrendiğiniz konu hakkındaki bilgilerinizi kullanarak cevaplayabileceğiniz sorular bu bölümde yer almaktadır. Bu bölümdeki sorular, işlenişteki örneklere benzerdir. Bu soruları çözerken eksiklerinizin olduğunu tespit ederseniz çözümlü örnekleri tekrar gözden geçirebilir veya öğretmeninizden yardım alabilirsiniz.

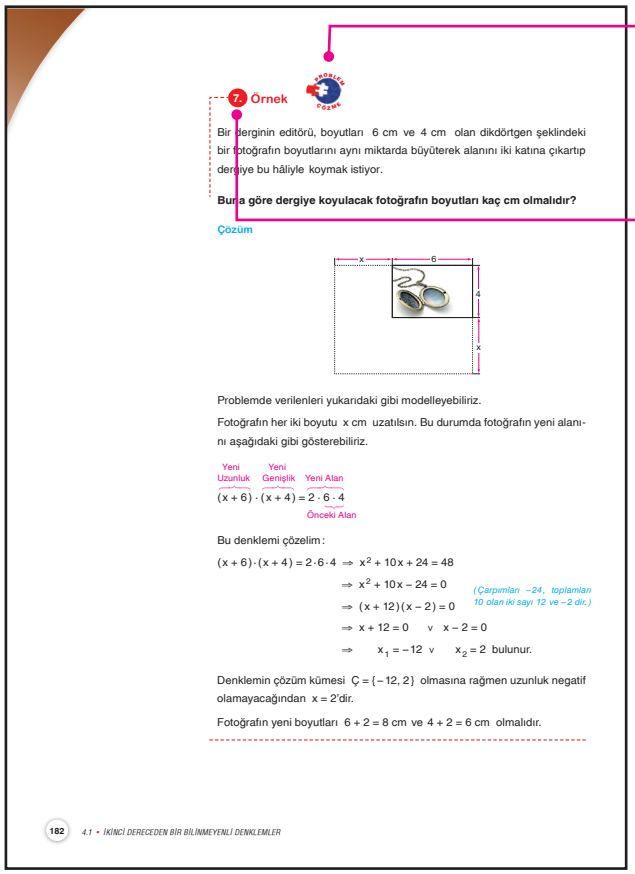
İşlenişte problem çözme süreçlerine yer verildiğini ifade eder.

Öncesinde açıklamalarını gördüğünüz konuların uygulamaları bu bölümde yer almaktadır. Her bölüme ait örnekler kendi içinde numaralandırılmıştır.

Bu simgeyi gördüğünüz yerlerde, bir grafik çizme yazılımı kullanmanız önerilmektedir.

Bu simgeyi gördüğünüz yerlerde, grafiksel hesap makinesi kullanmanız önerilmektedir. Grafiksel hesap makineleri, matematiksel fonksiyonların grafiklerini çizme ve analiz etme kapasitesine sahip özel bilimsel hesap makinelerine verilen genel isimdir.

İşlenen konu ile ilgili merakınızı uyandıracak bilgileri içerir.



**7. Örnek** PROBLEMLER ÇÖZME

Bir derginin editörü, boyutları 6 cm ve 4 cm olan dikdörtgen şeklindeki bir fotoğrafın boyutlarını aynı miktarda büyüterek alanını iki katına çıkartıp dergiye bu hâliyle koymak istiyor.

**Buna göre dergiye koyulacak fotoğrafın boyutları kaç cm olmalıdır?**

**Çözüm**

Problemde verilenleri yukarıdaki gibi modelleyebiliriz.

Fotoğrafın her iki boyutu x cm uzatılsın. Bu durumda fotoğrafın yeni alanını aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$\underbrace{(x+6)}_{\text{Yeni Uzunluk}} \cdot \underbrace{(x+4)}_{\text{Yeni Genişlik}} = \underbrace{2 \cdot 6 \cdot 4}_{\text{Yeni Alan}}$ (Önceki Alan)

Bu denklemi çözelim:

$(x+6)\cdot(x+4) = 2\cdot6\cdot4 \Rightarrow x^2 + 10x + 24 = 48$

$\Rightarrow x^2 + 10x - 24 = 0$ (Çarpımları $-24$, toplamları 10 olan iki sayı 12 ve $-2$ dir.)

$\Rightarrow (x+12)(x-2) = 0$

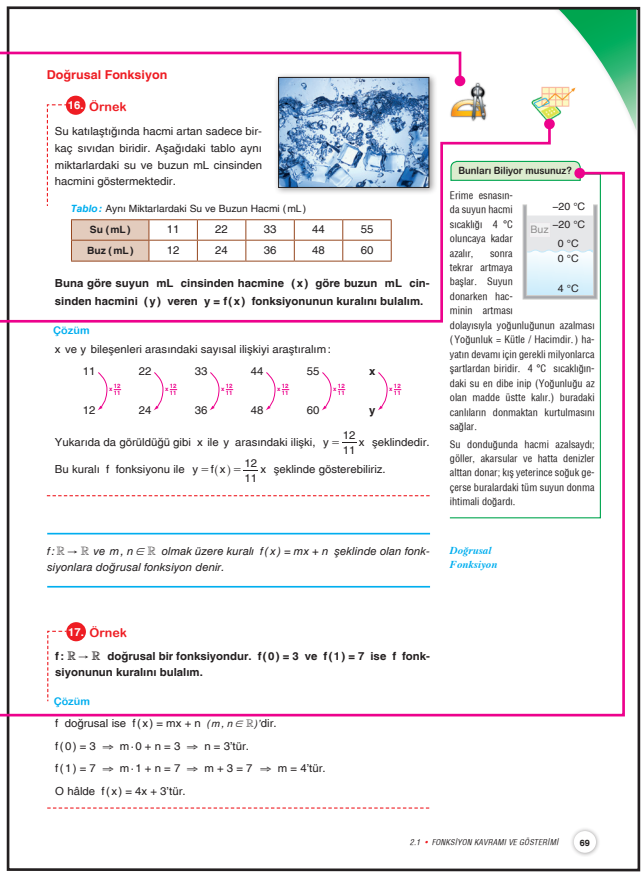
$\Rightarrow x+12 = 0 \quad \vee \quad x-2 = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = -12 \ \vee \quad x_2 = 2$ bulunur.

Denklemin çözüm kümesi $Ç = \{-12, 2\}$ olmasına rağmen uzunluk negatif olamayacağından $x = 2$'dir.

Fotoğrafın yeni boyutları $6 + 2 = 8$ cm ve $4 + 2 = 6$ cm olmalıdır.

182 4.1 • İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER



**Doğrusal Fonksiyon**

**16. Örnek**

Su katılaştığında hacmi artan sadece birkaç sıvıdan biridir. Aşağıdaki tablo aynı miktarlardaki su ve buzun mL cinsinden hacmini göstermektedir.

*Tablo:* Aynı Miktarlardaki Su ve Buzun Hacmi (mL)

| Su (mL) | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 |
|---|---|---|---|---|---|
| Buz (mL) | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 |

**Buna göre suyun mL cinsinden hacmine (x) göre buzun mL cinsinden hacmini (y) veren y = f(x) fonksiyonunun kuralını bulalım.**

**Çözüm**

x ve y bileşenleri arasındaki sayısal ilişkiyi araştıralım:

$11 \xrightarrow{\cdot\frac{12}{11}} 12 \quad 22 \xrightarrow{\cdot\frac{12}{11}} 24 \quad 33 \xrightarrow{\cdot\frac{12}{11}} 36 \quad 44 \xrightarrow{\cdot\frac{12}{11}} 48 \quad 55 \xrightarrow{\cdot\frac{12}{11}} 60 \quad x \xrightarrow{\cdot\frac{12}{11}} y$

Yukarıda da görüldüğü gibi x ile y arasındaki ilişki, $y = \frac{12}{11}x$ şeklindedir.

Bu kuralı f fonksiyonu ile $y = f(x) = \frac{12}{11}x$ şeklinde gösterebiliriz.

*$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere kuralı $f(x) = mx + n$ şeklinde olan fonksiyonlara doğrusal fonksiyon denir.*

**17. Örnek**

**$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ doğrusal bir fonksiyondur. $f(0) = 3$ ve $f(1) = 7$ ise f fonksiyonunun kuralını bulalım.**

**Çözüm**

f doğrusal ise $f(x) = mx + n$ $(m, n \in \mathbb{R})$'dir.

$f(0) = 3 \Rightarrow m\cdot0 + n = 3 \Rightarrow n = 3$'tür.

$f(1) = 7 \Rightarrow m\cdot1 + n = 7 \Rightarrow m + 3 = 7 \Rightarrow m = 4$'tür.

O hâlde $f(x) = 4x + 3$'tür.

**Bunları Biliyor musunuz?**

Erime esnasında suyun hacmi sıcaklığı 4 °C oluncaya kadar azalır, sonra tekrar artmaya başlar. Suyun donarken hacminin artması dolayısıyla yoğunluğunun azalması (Yoğunluk = Kütle / Hacimdir.) hayatın devamı için gerekli milyonlarca şartlardan biridir. 4 °C sıcaklığındaki su en dibe inip (Yoğunluğu az olan madde üstte kalır.) buradaki canlıların donmaktan kurtulmasını sağlar.

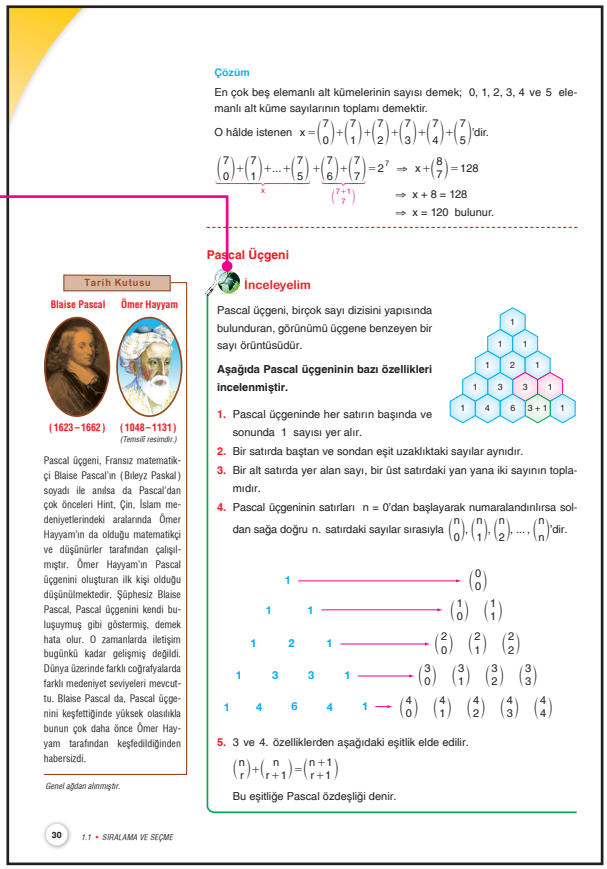
Su dondurunda hacmi azalsaydı; göller, akarsular ve hatta denizler alttan donar; kış yeterince soğuk geçerse buralardaki tüm suyun donma ihtimali doğardı.



*Doğrusal Fonksiyon*

2.1 • FONKSİYON KAVRAMI VE GÖSTERİMİ 69

Verilen bilgilerin doğruluğunu, ispatını veya açıklamasını içeren uygulamaların bulunduğu bölümdür.



Çözüm

En çok beş elemanlı alt kümelerinin sayısı demek; 0, 1, 2, 3, 4 ve 5 elemanlı alt küme sayılarının toplamı demektir.

O hâlde istenen $x=\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}$'dir.

$\underbrace{\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\ldots+\binom{7}{5}}_{x}+\underbrace{\binom{7}{6}+\binom{7}{7}}_{\binom{7+1}{7}}=2^7 \Rightarrow x+\binom{8}{7}=128$

$\Rightarrow x+8=128$

$\Rightarrow x=120$ bulunur.

**Pascal Üçgeni**

Tarih Kutusu

Blaise Pascal (1623–1662) — Ömer Hayyam (1048–1131)



(Temsili resimdir.)

Pascal üçgeni, Fransız matematikçi Blaise Pascal'ın (Bileyz Paskal) soyadı ile anılsa da Pascal'dan çok önceleri Hint, Çin, İslam medeniyetlerindeki aralarında Ömer Hayyam'ın da olduğu matematikçi ve düşünürler tarafından çalışılmıştır. Ömer Hayyam'ın Pascal üçgenini oluşturan ilk kişi olduğu düşünülmektedir. Şüphesiz Blaise Pascal, Pascal üçgenini kendi buluşuymuş gibi göstermiş, demek hata olur. O zamanlarda iletişim bugünkü kadar gelişmiş değildi. Dünya üzerinde farklı coğrafyalarda farklı medeniyet seviyeleri mevcuttu. Blaise Pascal da, Pascal üçgenini keşfettiğinde yüksek olasılıkla bunun çok daha önce Ömer Hayyam tarafından keşfedildiğinden habersizdi.

*Genel ağdan alınmıştır.*

İnceleyelim

Pascal üçgeni, birçok sayı dizisini yapısında bulunduran, görünümü üçgene benzeyen bir sayı örüntüsüdür.



**Aşağıda Pascal üçgeninin bazı özellikleri incelenmiştir.**

1. Pascal üçgeninde her satırın başında ve sonunda 1 sayısı yer alır.
2. Bir satırda baştan ve sondan eşit uzaklıktaki sayılar aynıdır.
3. Bir alt satırda yer alan sayı, bir üst satırdaki yan yana iki sayının toplamıdır.
4. Pascal üçgeninin satırları n = 0'dan başlayarak numaralandırılırsa soldan sağa doğru n. satırdaki sayılar sırasıyla $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$'dir.

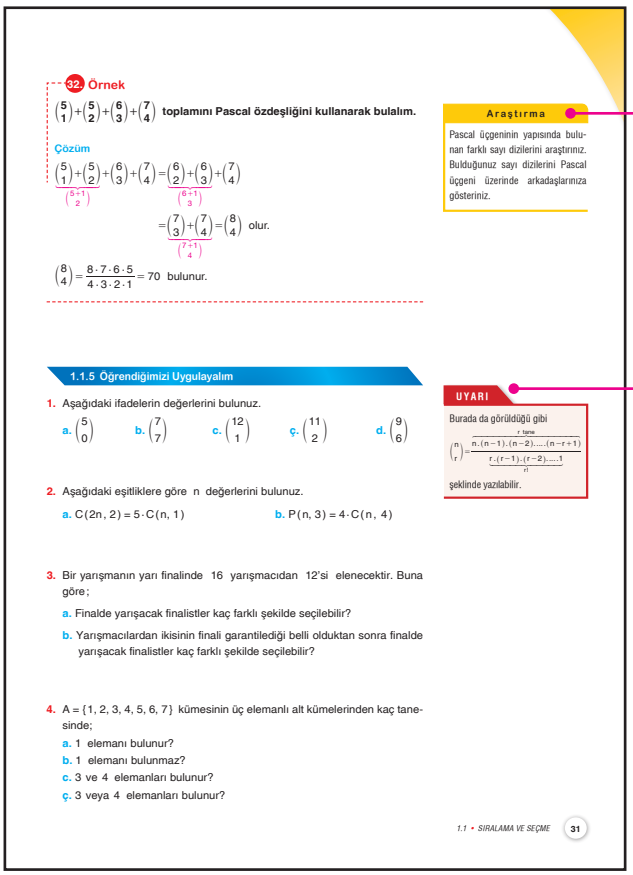


5. 3 ve 4. özelliklerden aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$

Bu eşitliğe Pascal özdeşliği denir.





**32. Örnek** $\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{6}{3}+\binom{7}{4}$ **toplamını Pascal özdeşliğini kullanarak bulalım.**

Çözüm

$\underbrace{\binom{5}{1}+\binom{5}{2}}_{\binom{5+1}{2}}+\binom{6}{3}+\binom{7}{4}=\underbrace{\binom{6}{2}+\binom{6}{3}}_{\binom{6+1}{3}}+\binom{7}{4}$

$=\underbrace{\binom{7}{3}+\binom{7}{4}}_{\binom{7+1}{4}}=\binom{8}{4}$ olur.

$\binom{8}{4}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=70$ bulunur.

Araştırma

Pascal üçgeninin yapısında bulunan farklı sayı dizilerini araştırınız. Bulduğunuz sayı dizilerini Pascal üçgeni üzerinde arkadaşlarınıza gösteriniz.

**1.1.5 Öğrendiğimizi Uygulayalım**

1. Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

   a. $\binom{5}{0}$ b. $\binom{7}{7}$ c. $\binom{12}{1}$ ç. $\binom{11}{2}$ d. $\binom{9}{6}$

2. Aşağıdaki eşitliklere göre n değerlerini bulunuz.

   a. $C(2n, 2)=5\cdot C(n, 1)$ b. $P(n, 3)=4\cdot C(n, 4)$

3. Bir yarışmanın yarı finalinde 16 yarışmacıdan 12'si elenecektir. Buna göre;

   a. Finalde yarışacak finalistler kaç farklı şekilde seçilebilir?

   b. Yarışmacılardan ikisinin finali garantilediği belli olduktan sonra finalde yarışacak finalistler kaç farklı şekilde seçilebilir?

4. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} kümesinin üç elemanlı alt kümelerinden kaç tanesinde;

   a. 1 elemanı bulunur?

   b. 1 elemanı bulunmaz?

   c. 3 ve 4 elemanları bulunur?

   ç. 3 veya 4 elemanları bulunur?

UYARI

Burada da görüldüğü gibi

$\binom{n}{r}=\frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}^{r\ \text{tane}}}{\underbrace{r\cdot(r-1)\cdot(r-2)\cdot\ldots\cdot1}_{r!}}$

şeklinde yazılabilir.



Araştırılması istenen konular bu bölümde yer alır. Araştırma yapmaya başlamadan önce amacınızı iyi belirlemeli ve araştırmanızda takip edeceğiniz planı önceden hazırlamalısınız.

İşlenişle ilgili uyarıların verildiği, yönlendirmelerin ve oluşabilecek kavram yanılgılarıyla ilgili açıklamaların yapıldığı bölümdür.

## 2.1.2 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI

**1.** Aşağıdaki ifadelerde noktalı yerleri tamamlayınız.

**a.** Analitik düzlemdeki bir grafik, ancak her ..... ..... doğrunun, grafiği en fazla ..... noktada kesmesi durumunda bir fonksiyon grafiği belirtir.

**b.** $(2, -4)$ noktası f fonksiyonunun grafiği üzerinde ise $f(....) = .....$

**c.** f fonksiyonunun x eksenini kestiği noktalar ..... denkleminin kökleridir.

**2.** Aşağıdaki ifadeler doğruysa boş kutulara "D", yanlışsa "Y" yazınız.

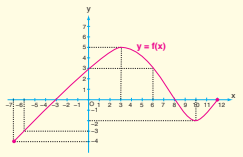
**a.** ☐ Bir fonksiyonun grafiği y eksenini birden fazla noktada kesebilir.

**b.** ☐ Her fonksiyon grafiği y eksenini keser.

**c.** ☐ Fonksiyon grafiğinin y eksenini kestiği nokta $f(0)$ değerini verir.

**3.** Sadece bir noktadan oluşan bir grafik, fonksiyon grafiği olabilir mi? Cevabınız evet ise bu durumu örnekleyen bir fonksiyon yazınız.

**4.**




Aşağıdaki soruları yukarıdaki grafiğe göre cevaplayınız.

**a.** Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

**i.** $f(-6)$ **ii.** $f(-3)$ **iii.** $f(0)$

**iv.** $f(3)$ **v.** $f(6)$ **vi.** $f(10)$

**b.** f fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

**c.** f fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

**ç.** $f(x) = 0$ denkleminin kökleri nelerdir?

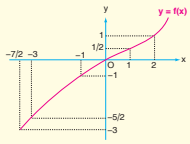
**d.** $f(x) = 1$ denkleminin kaç kökü vardır?

**e.** $f(x) = -\frac{1}{2}$ denkleminin kaç kökü vardır?

**f.** Aşağıda verilenlere göre a, b ve c değerlerini bulunuz.

**i.** $f(a) = -3$ **ii.** $f(b) = -4$ **iii.** $f(c) = 5$

**5.**




Aşağıda istenenleri yukarıda verilen f fonksiyonunun grafiğine göre bulunuz.

**a.** $f(-3)$

**b.** $f(0)$

**c.** $f(2)$

**ç.** $f(a) = \frac{1}{2}$ ise $a = ?$

**d.** $f(b) = -1$ ise $b = ?$

**e.** $f(c) = -\frac{5}{2}$ ise $c = ?$

**f.** $f(f(2))$

**g.** $f(f(-1))$

**ğ.** $f([-3, 1]) = A$ ise $A = ?$

**h.** $f(B) = [-1, 1]$ ise $B = ?$



Alt öğrenme alanlarındaki her ana konunun sonunda öğrendiklerinizi uygulayabileceğiniz, becerilerinizi gösterebileceğiniz farklı tipte soruların bulunduğu bir alıştırma sayfası yer almaktadır. Her soruda tam olarak ne istendiğini anladıktan sonra soruya cevap vermelisiniz. Tam olarak ne istendiğini kavrayamadığınız sorular olursa ilgili konuyu kitabınızdan tekrar edebilir ya da öğretmeninizden yardım alabilirsiniz.

Her alt öğrenme alanının sonunda, o alt öğrenme alanı boyunca öğrendiklerinizi ölçmeniz amacıyla hazırlanmış çoktan seçmeli sorulardan oluşan bir teste yer verilmiştir. Öğretmeninizin bu testlerle ilgili değerlendirmelerini dikkate alınız.

## 2. ALT ÖĞRENME ALANI TESTİ

**1.** $f: A \to [-7, 1)$ fonksiyonu için,

$f(x) = -2x + 3$

**olduğuna göre A kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(-1, 4]$ B) $(1, 5]$ C) $(1, 5)$

D) $(4, 5]$ E) $[5, 7)$

**2.** $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4 & , x \geq 2 \text{ ise} \\ x + 3 & , x < 2 \text{ ise} \end{cases}$

**olduğuna göre $f(2) - f(-1)$ kaçtır?**

A) $-2$ B) 0 C) 2 D) 4 E) 6

**3.** Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f fonksiyonu,

$f(x) = mx^3 + n$

biçiminde tanımlanıyor.

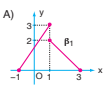
**$f(1) = 4$ ve $f(0) = 2$ olduğuna göre $f(2)$ kaçtır?**

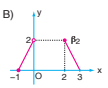
A) 12 B) 16 C) 18 D) 24 E) 32

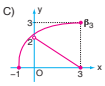
**4.** **Köşegen uzunluğu x br olan bir karenin çevresinin x'e bağlı fonksiyonu, Ç(x) olduğuna göre $Ç(2\sqrt{2})$ kaçtır?**

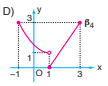
A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 4 D) $4\sqrt{2}$ E) 8

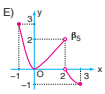
**5.** **Aşağıda grafikleri verilen matematiksel ilişkilerden hangisi $[-1, 3] \to [-1, 3]$ tanımlı bir fonksiyon belirtir?**

A) 

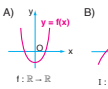

B) 

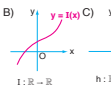

C) 


D) 

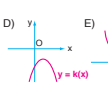

E) 

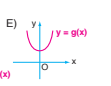

**6.** **Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi, tanımlı olduğu aralıkta örten bir fonksiyondur?**

A) 


B) 


C)


D) 


E) 


**7.** **Aşağıdakilerden hangisi bir fonksiyon belirtir?**

A) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \frac{x+3}{2-x}$

B) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{2}{x+1}$

C) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = -x - 1$

D) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 3x - 5$

E) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \sqrt{5+x}$

# 1. ALT ÖĞRENME ALANI

# SAYMA VE OLASILIK

## Konular

**1.1** **Sıralama ve Seçme**

**1.2** **Basit Olayların Olasılıkları**

*Bu alt öğrenme alanında nesnelerin veya olayların gerçekleşme sayısını bulurken toplama ve çarpma işlemlerinin yanı sıra başka yöntemleri de kullanacağız. Zaman zaman ilginç sonuçlarla karşılaşacağız. Örneğin 15 farklı kitabın bir rafa olası bütün sıralanışlarını gerçekleştirmenin 2,5 milyon yıl süreceğini idrak edip açıklayabileceğiz.*

*Bu alt öğrenme alanında sayma konusunun yanı sıra olasılık ile ilgili kavramları ve olayların olma olasılığını hesaplamayı öğreneceğiz. Bulutlara bakarak yağmurun yağıp yağmayacağını söylememizin temelinde olasılık kavramı vardır. Şans oyunlarının temelini olasılık oluşturur. İş hayatında simülasyon oluşturulurken, proje planlanırken ya da risk analizi yapılırken yine olasılık kullanılır. Anlayacağınız gibi olasılığın günlük hayattaki yeri oldukça büyüktür.*

# Hazır mısınız?

**1. Alt Öğrenme Alanı**

**1.** Aşağıdaki ifadeleri en sade şekilde yazınız.

**a.** $\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{9}$

**b.** $\frac{24}{35}\cdot\frac{21}{48}$

**c.** $\frac{4}{14}\cdot\frac{25}{36}\cdot\frac{49}{15}$

**ç.** $\frac{12}{28}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{21}{16}$

**2.** Aşağıdaki ifadeleri ortak çarpan parantezine alma yöntemini kullanarak en sade şekilde yazınız.

**a.** $\frac{7\cdot13-11\cdot7}{2\cdot5-2\cdot2}$

**b.** $\frac{15\cdot8-7\cdot15+15\cdot2}{5\cdot9-4\cdot5+5\cdot3}$

**3.** $A = 15\cdot14\cdot13\cdot\ldots\cdot2\cdot1$

$B = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot12\cdot13$

olduğuna göre A, B'nin kaç katıdır?

**4.** Aşağıdaki eşitliklere göre n'nin alabileceği pozitif tam sayı değerlerini bulunuz.

**a.** $n(n-1) = 4\cdot3$

**b.** $(n-1)(n+1) = 3\cdot5$

**c.** $n(n-1) = 30$

**ç.** $(n-1)(n+1) = 35$

**5.** Aşağıdaki eşitliklere göre a'nın alabileceği tam sayı değerlerini bulunuz.

**a.** $a^2 = 0$

**b.** $a^2 = 2^2$

**c.** $a^3 = 2^3$

**ç.** $(a+3)^2 = 4$

**d.** $(a+3)^3 = 8$

**e.** $(a+3)^4 = 16$

**6.** Aşağıdaki ifadeleri en sade şekilde yazınız.

**a.** $(-1)^5\cdot(-x)^5\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^3$

**b.** $\left(-\frac{1}{x}\right)^4\cdot(-x^2)^5\cdot(-5)^3$

**c.** $\left(-\frac{2}{3}\right)^3\cdot(x^3)^5\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2$

**ç.** $(x^3)^2\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)^5\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2$

**7.** Bir torbada 8 kırmızı ve 12 mavi top vardır. Torbadan alınan toplar tekrar yerine konularak torbadan 10 kez top çekiliyor.

Buna göre aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına "D", yanlış olanların başına "Y" yazınız.

**a.** ( ) Daha az sayıda kırmızı top çekildiği kesindir.

**b.** ( ) Eşit sayıda kırmızı ve mavi top çekilmiş olabilir.

**c.** ( ) Çekilen toplardan mavi olanlar kesin daha fazladır.

**ç.** ( ) Mavi top hiç çekilmemiş olabilir.

KONU 1.1

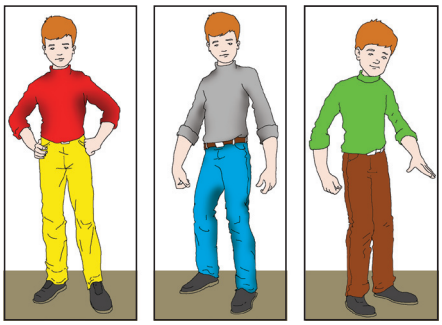
# SIRALAMA VE SEÇME

## Sayma Yöntemleri

Günlük Hayat Bağlantısı

Yanda da görüldüğü gibi Hakan'ın 3 farklı renkte (kırmızı, gri, yeşil) kazağı ve 3 farklı renkte (sarı, mavi, kahverengi) pantolonu vardır.

Hakan bir pantolon ve bir kazağı kaç farklı şekilde giyebilir?



**Neler Öğreneceğiz?**

- Toplama yöntemi ile saymayı
- Çarpma yöntemi ile saymayı
- Faktöriyeli
- Permütasyonu
- Tekrarlı permütasyonu
- Kombinasyonu
- Pascal (Paskal) özdeşliğini
- Binom açılımını

*Toplama Yöntemiyle Sayma*

- *$A_1$, $A_2$, $A_3$, ..., $A_n$ birbirinden farklı n küme olsun ve bu kümelerden herhangi ikisinin ortak elemanı olmasın. Bu durumda,*
  $s(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n) = s(A_1) + s(A_2) + s(A_3) + ... + s(A_n)$*'dir.*
- *Bu şekilde yapılan sayma işlemine toplama yöntemiyle sayma denir.*

### 1. Örnek

***Tablo:*** Üniversitelerdeki Öğrenci Sayıları Özet Tablosu, 2022 – 2023

| Öğretim Alanı | Kadın | Erkek |
|---|---|---|
| Önlisans | 1 361 251 | 1 285 803 |
| Lisans | 1 908 508 | 1 845 587 |
| Yüksek Lisans | 207 304 | 227 181 |
| Doktora | 56 103 | 58 405 |

*Genel ağdan alınmıştır.*

Yukarıdaki tablo 2022 – 2023 öğretim yılında üniversite öğrenim düzeyi ve cinsiyete göre Türkiye'de üniversite eğitimi alan öğrenci sayılarını göstermektedir.

**Buna göre 2022 – 2023 öğretim yılında Türkiye'deki üniversitelerde;**

**a. Kaç lisans öğrencisinin öğrenim gördüğünü bulalım.**

**b. Önlisans, lisans ve yüksek lisans düzeyinde öğrenim gören öğrencilerden kaçının erkek olduğunu bulalım.**

**Çözüm**

**a.** Lisans düzeyinde öğrenim gören kız öğrencilerin kümesi A, erkek öğrencilerin kümesi B ise,

$s(A) = 1\,908\,508$ ve $s(B) = 1\,845\,587$ olur. Bu durumda,

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B)$$
$$= 1\,908\,508 + 1\,845\,587$$
$$= 3\,754\,095 \text{ bulunur.}$$

**b.** Önlisans düzeyinde öğrenim gören erkek öğrencilerin kümesi C, lisans düzeyinde öğrenim gören erkek öğrencilerin kümesi D ve yüksek lisans düzeyinde öğrenim gören erkek öğrencilerin kümesi E ise,

$s(C) = 1\,285\,803$, $s(D) = 1\,845\,587$ ve $s(E) = 227\,181$ olur. Bu durumda,

$$s(C \cup D \cup E) = s(C) + s(D) + s(E)$$
$$= 1\,285\,803 + 1\,845\,587 + 227\,181$$
$$= 3\,358\,571 \text{ bulunur.}$$

## 2. Örnek

**İki farklı renkle (kırmızı ve yeşil) şapkası ve üç farklı renkte (siyah, mavi, kahverengi) ayakkabısı olan Ayşe'nin bir şapka ve bir ayakkabıyı kaç farklı şekilde giyebileceğini bulalım.**

**Çözüm**

Yandaki ağaç şemasından da görüleceği gibi 2 farklı şapka seçeneğinin her biri için 3 farklı ayakkabı seçeneği bulunmaktadır.

Yani Ayşe bir şapka ve bir ayakkabıyı $2 \cdot 3 = 6$ farklı şekilde giyebilir.

***Saymanın Temel İlkesi***

- *Birbirinden ayrık $r$ tane olayın gerçekleşmesinde; 1. olay için $n_1$ farklı yol olsun. Buna ve birbirine bağlı olarak 2. olay için $n_2$ farklı yol, 3. olay için $n_3$ farklı yol, ..., $r$. olay için $n_r$ farklı yol varsa $r$ tane olayın sıralı bir biçimde gerçekleşmesi için $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_r$ tane yol vardır.*
- *Bu şekilde yapılan sayma işlemine çarpma yöntemiyle sayma veya saymanın temel ilkesi denir.*

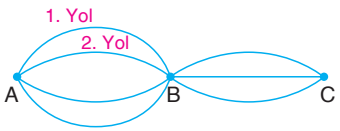
## 3. Örnek

A kentinden B kentine 4 farklı yol, B kentinden C kentine 3 farklı yol vardır.

**B'ye uğramak koşulu ile A'dan C'ye kaç farklı yolla gidilebileceğini bulalım.**

### Çözüm

A, B ve C kentleri arasındaki yollar yandaki şekilde modellenmiştir.




Eğer 1. yoldan gidersek yolculuğu tamamlamak için 3 farklı yol kalır.

Eğer 2. yoldan gidersek yolculuğu tamamlamak için 3 farklı yol kalır.

⋮

Benzer şekilde devam edersek,

$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3 = 12$ farklı şekilde A'dan C'ye gidilebileceğini görürüz. Buradaki $4 \cdot 3$ işleminde 4 A ile B, 3 ise B ile C arasındaki yolların sayısıdır.

## 4. Örnek

**a.** **3 zarfın 5 posta kutusuna kaç değişik biçimde atılabileceğini bulalım.**

**b.** **Bir posta kutusuna en çok bir mektup atmak koşulu ile 3 zarfın 5 posta kutusuna kaç farklı şekilde atılabileceğini bulalım.**

### Çözüm

**a.** 1. zarf 5 posta kutusundan birine,

2. zarf 5 posta kutusundan birine,

3. zarf 5 posta kutusundan birine atılabileceğinden (Şekil 1)

3 zarf 5 posta kutusuna $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$ farklı şekilde atılabilir.

*Şekil 1*

**b.** 1. zarf 5 posta kutusundan birine,

2. zarf kalan 4 posta kutusundan birine,

3. zarf kalan 3 posta kutusundan birine atılabileceğinden (Şekil 2)

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ farklı şekilde atılabilir.

*Şekil 2*

## 5. Örnek

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

**kümesinin elemanları kullanılarak 3 basamaklı;**

**a.** Kaç doğal sayı yazılabileceğini bulalım.

**b.** Rakamları farklı kaç doğal sayı yazılabileceğini bulalım.

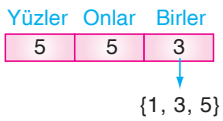
**c.** Kaç tek doğal sayı yazılabileceğini bulalım.

**ç.** Rakamları farklı kaç tek doğal sayı yazılabileceğini bulalım.

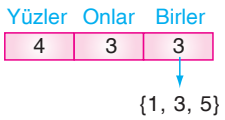
**Şekil 1**

**Şekil 2**

**Şekil 3**




**Şekil 4**




**Çözüm**

**a.** Rakamlarının farklı olması koşulu bulunmadığından, her basamakta 5 rakamı da kullanabiliriz. O hâlde,

$5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ tane 3 basamaklı doğal sayı yazılabilir (Şekil 1).

**b.** Yüzler basamağına 5 rakamdan biri seçilir. Yazılacak sayının rakamları farklı olacağından onlar basamağına kalan 4 rakamdan biri seçilir. Birler basamağına kalan 3 rakamdan biri seçilir. O hâlde 3 basamaklı rakamları farklı,

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ tane doğal sayı yazılabilir (Şekil 2).

**c.** Yazılacak 3 basamaklı sayı, tek sayı olacağından birler basamağındaki rakam $\{1, 3, 5\}$ kümesinin elemanları arasından seçilmelidir. Dolayısıyla bu 3 rakamdan biri seçilebilir.

Sayının rakamlarının farklı olması koşulu olmadığından yüzler ve onlar basamağında 5 rakamı da kullanabiliriz. O hâlde 3 basamaklı,

$5 \cdot 5 \cdot 3 = 75$ tane tek doğal sayı yazılabilir (Şekil 3).

**ç.** Rakamları farklı tek doğal sayı yazılacağından önce birler basamağına $\{1, 3, 5\}$ rakamlarından biri seçilir. Yüzler basamağına kalan 4 rakamdan biri seçilir. Onlar basamağına kalan 3 rakamdan biri seçilir. O hâlde 3 basamaklı rakamları farklı,

$4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ tane tek doğal sayı yazılabilir (Şekil 4).

*"Harf dizilimi" ifadesi ile yan yana yazıldığında bir anlam ifade eden kelimelerle birlikte anlam ifade etmeyen harf grupları kastedilmiştir.*

*Örnek: KOCA → anlamlı*
*KCEL → anlamsız*

## 6. Örnek

KOCAELİ kelimesindeki harfler kullanılarak anlamlı ya da anlamsız dört harfli harf dizilimleri yazılacaktır.

**Bu kelimelerin kaç tanesinde "E" harfinin olduğunu bulalım.**

**Çözüm**

KOCAELİ kelimesindeki harflerle oluşturulacak tüm dört harfli harf dizilimlerinin sayısından içinde "E" harfi bulunmayan dört harfli harf dizilimlerinin sayısını çıkarmalıyız.

KOCAELİ kelimesindeki 7 harfle yazılabilecek dört harfli harf dizilimlerinin sayısı, $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4 = 2401$'dir (Tablo 1).

KOCAELİ kelimesindeki "E" harfini çıkardığımızda kalan harflerin kümesi {K, O, C, A, L, İ}'dir. Bu kümenin elemanları ile oluşturulabilecek dört harfli harf dizilimlerinin sayısı $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$'dır (Tablo 2) ve bu kelimelerin hiçbirinde "E" harfi bulunmaz.

O hâlde $2401 - 1296 = 1105$ tane dört harfli harf diziliminde "E" harfi bulunur.

**Tablo 1**

| 1. Harf | 2. Harf | 3. Harf | 4. Harf |
|---|---|---|---|
| 7 | 7 | 7 | 7 |

**Tablo 2**

| 1. Harf | 2. Harf | 3. Harf | 4. Harf |
|---|---|---|---|
| 6 | 6 | 6 | 6 |

**Tarih Kutusu**

İlk toplumlar, günlük hayatlarında saymaya yönelik ihtiyaçlarını karşılamak için eşleme yöntemini kullanmışlardır. Örneğin çobanlar sürülerindeki hayvanların eksilip eksilmediğini takip etmek için kemiğe kesici aletlerle çeltik çizmişlerdir. Eski Mısırlılar ve Babiller sayıları göstermek, toplama, çıkarma ve çarpma gibi işlemleri yapmak ve nesneleri bu yollarla saymak için farklı semboller üretmişler.

Mezopotamya'da çivi yazısının bulunmasından önce sayılar yerine resimler, çivi yazısı bulunduktan sonra da Babillerin kullandığı rakamlara benzer rakamlar kullanılmıştır. Tarımın başlaması ve saymaya duyulan ihtiyaçla Iraklı çiftçiler yazılı sayıları keşfetmişlerdir.

Grek Medeniyeti'nde Romalılar Dönemi'nden önce sayılar uzun süre, sayıları ifade etmekte kullanılan kelimelerin baş harfleri ile gösterilmiştir.

Roma sayıları Roma İmparatorluğu zamanında Avrupa'ya yayılmış ve Avrupalılar 2000 yıl boyunca Romen rakamlarını ve sayma sistemini kullanmışlardır.

Günümüzde kullandığımız onluk sayı sistemi Hint – Arap sayı sistemidir. Onluk sayı sisteminde kullanılan rakamlar Hintlilerden Müslüman Araplara, oradan İslam dininin yaygınlaşmasına paralel olarak önce Kuzey Afrika'ya, ardından Endülüs üzerinden Avrupa'ya ulaşmıştır.

İslam dünyasında sayılar ve sayma yöntemleri ile ilgili gelişmelerde önemli katkısı olan bilginlerden biri de Harran'da yaşamış olan Sâbit İbn Kurrâ'dır (826 – 901). Pozitif gerçek sayılar, integral, sayılar teorisi, trigonometri, astronomi, mekanik ve statik üzerine çalışmalar yapmıştır.

Cebiri geometriye başarıyla uygulayarak Hârezmî'nin geometrik çözümleri ile Eukleides'in (Öklides) teoremleri arasında bağlantı kurmuştur. Sinüs teoremi ile ilgili çalışmalar yürütmüş, bu teoremi astronomiye uygulamıştır. Pisagor teoreminin genel bir ispatını yapmış, "dost sayılar" kuramını ele almış, parabol ve paraboloidler üzerinde yoğun olarak çalışmıştır.

* *Matematik Tarihi ve Türk - İslam Matematikçilerinin Yeri*

### 1.1.1 Kritik Düşünme

Bir okulda düzenlenen Matematik Kongresinde 150 delege bulunmaktadır. Delegelerin 10'u organizasyon komitesini oluşturmaktadır.

**a.** Organizasyon komitesindeki herkes birbiri ile tokalaşırsa kaç farklı tokalaşma gerçekleşir?

**b.** 150 delegenin hepsi birbiri ile tokalaşırsa kaç farklı tokalaşma gerçekleşir?

*Ülkemizde her yıl ortaöğretim ve lisans düzeyinde matematik üzerine kongreler yapılmakta, bu kongrelere araştırmacılar, akademisyenler, öğretmenler ve öğrenciler katılmaktadır. Bu tür etkinlikler, öğrencilerin matematikle ilgili pozitif tutum geliştirmesi, mantıklı ve eleştirel düşünme, farklı bakış açısı geliştirme, çözümler üretebilme becerilerini geliştirebilmeleri yönünde öğrenciler için son derece faydalı organizasyonlardır.*

### 1.1.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Yandaki tablo ile 2021 yılında Türkiye'deki sağlık personelinin sayıları gösterilmiştir. Buna göre 2021 yılında Türkiye'deki

**a.** Ebe veya hemşire sayısı kaçtır?

**b.** Toplam sağlık personeli sayısı kaçtır?

***Tablo:*** Sağlık Personelinin Sayıları, Türkiye, 2021

| | |
|---|---|
| Hekim | 183 569 |
| Hemşire | 232 442 |
| Ebe | 57 908 |
| Diş Hekimi | 39 851 |
| Eczacı | 37 211 |
| Sağlık Memuru | 219 630 |
| Diğer Personel ve Hizmet Alımı | 481 311 |

*Genel ağdan alınmıştır.*

**2.** 3 şapka, 4 etek ve 5 tişörtü olan bir kişi; bir şapka, bir etek ve bir tişörtü kaç farklı şekilde giyebilir?

**3.** A şehrinden B şehrine 4, B şehrinden C şehrine 5 farklı yol vardır. Buna göre;

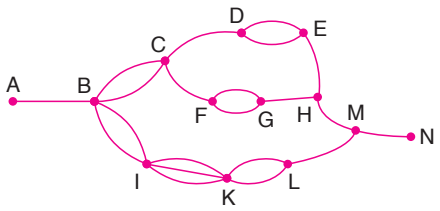
**a.** A'dan C'ye gitmek isteyen bir kişi B'ye uğramak koşulu ile kaç farklı şekilde gidebilir?

**b.** A'dan C'ye gidip tekrar A'ya dönmek isteyen bir kişi B'ye uğramak koşulu ile kaç farklı şekilde gidebilir.

**c.** A'dan C'ye gidip tekrar A'ya dönmek isteyen bir kişi B'ye uğramak ve gittiği yoldan dönmemek koşulu ile kaç farklı şekilde gidebilir?

**4.** Yandaki yol haritasında şehirler harflerle gösterilmiştir.

A şehrinden N şehrine gitmek isteyen bir kişi kaç farklı yolla gidebilir?




**5.** Her biri 5 seçenekli 4 sorunun cevap anahtarı;

**a.** Kaç farklı şekilde hazırlanabilir?

**b.** Her bir sorunun cevap şıkkı farklı olmak koşulu ile kaç farklı şekilde hazırlanabilir?

**c.** Art arda gelen soruların cevap şıkkı farklı olmak koşulu ile kaç farklı şekilde hazırlanabilir?

**6.** A = {a, b, c, d, e, f} kümesindeki harflerle 4 harfli, anlamlı ya da anlamsız;

**a.** Kaç harf dizilimi yazılabilir?

**b.** Bir harfin en fazla bir kez kullanılması koşulu ile kaç harf dizilimi yazılabilir?

**c.** Sonu sesli harfle biten kaç harf dizilimi yazılabilir?

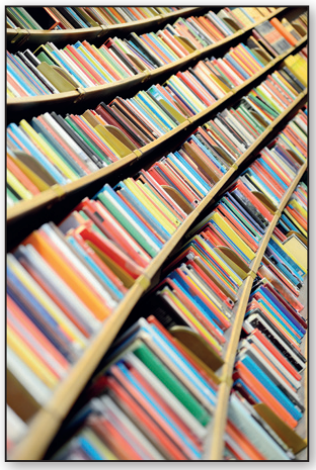
**ç.** Her bir harfin en fazla bir kez kullanılması koşulu ile sonu sesli harfle biten kaç harf dizilimi yazılabilir?

**7.** A = {1, 2, 3, 4} kümesinin elemanları ile en az iki rakamı birbirinin aynı olan, üç basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?

## Faktöriyel

Günlük Hayat Bağlantısı

Isaac Asimov *(Ayzık Asimov)*, ilginç bazı gerçekleri topladığı "Gerçeklerin Kitabı" isimli eserinde her sıralamanın bir dakika alacağını varsayarak 15 farklı kitabın bir rafa olası bütün sıralanışları için yaklaşık 2500000 yıl gerektiğini söylemektedir. Sizce bu doğru olabilir mi?



*Tahmin edeceğiniz gibi "Gerçeklerin Kitabı" çeviri bir kitaptır. Konusu ne olursa olsun her kitap yaratıcı bir düşünce ile yazılır, bu bağlamda yüksek ya da ortalama bir zekanın ürünüdür. Bir kitap yazarın kendi seçtiği kelime ve anlatım biçimi ile oluşur. Bu nedenle yazar ile okuyucu arasında köprü görevi gören çevirmen, bu köprüyü öyle inşa etmelidir ki yazarın kurgusunu okuyucuya doğru bir şekilde aktarabilsin. Bir kitabı özensizce çevirmek kitabın yazarına ve okuyucuya saygısızlıktır. Bu anlamda çevirmenlik son derece sorumluluk isteyen, titizlik gerektiren zor bir meslektir.*

### 7. Örnek

**Sırasıyla n = 1, n = 2, n = 3 ve n = 4 kitabın bir rafa olası tüm sıralanışlarının sayısını bulalım.**

#### Çözüm

Birinci sıra için tercih edilen bir kitap, ikinci sıra için tercih edilemez. Bu şekilde bir sonraki sıra için tercih sayısı bir azalır. Buna göre aşağıdaki tabloda sırasıyla 1, 2, 3 ve 4 kitabın bir rafa kaç farklı şekilde sıralanabileceği bulunmuş ve bu durum n kitap için genelleştirilmiştir.

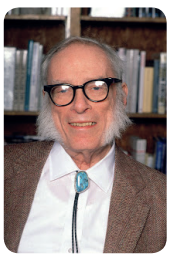
***Tablo:*** n Tane Kitabın Bir Rafa Olası Tüm Sıralanışlarının Sayısı

| Kitap Sayısı | Seçenek Sayısı | | | | | Sıralanış Sayısı |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1. Sıra | 2. Sıra | 3. Sıra | 4. Sıra | ... | |
| 1 | 1 | – | – | – | ... | 1 |
| 2 | 2 | 1 | – | – | ... | $2 \cdot 1 = 2$ |
| 3 | 3 | 2 | 1 | – | ... | $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ |
| 4 | 4 | 3 | 2 | 1 | ... | $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| **n** | **n** | **n – 1** | **n – 2** | **n – 3** | **...** | **$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$** |

Tablodan da görüleceği gibi n farklı kitap bir rafa saymanın temel ilkesi gereği $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$ farklı şekilde sıralanabilir.

**Bunları Biliyor musunuz?**

***Isaac Asimov***



***(1920 – 1992)***

Rusya doğumlu ABD'li yazar ve Biyokimyacıdır. Pek çok konuda yapıtları olmasına rağmen bilim kurgu eserleri ve popüler bilim kitapları ile tanınmıştır. Asimov ortak görüşle bilim–kurgu dalının ustasıdır.

*Genel ağdan alınmıştır.*

**Şimdi de $n = 15$ farklı kitabın bir rafa kaç farklı şekilde sıralanabileceğini bulalım:**

$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1\,307\,674\,368\,000$ farklı şekilde sıralanabilir.

Bu durumda tüm bu sıralanışları gerçekleştirmek ise yaklaşık,

$\frac{1\,307\,674\,368\,000}{60 \cdot 24 \cdot 365} \approx 2\,487\,964{,}93$ yıl alır.

O hâlde Asimov'un konu girişinde bahsettiğimiz söylemi doğrudur.

*Faktöriyel*

- *$n \geq 1$ olmak üzere 1'den $n$'ye kadar olan ardışık doğal sayıların çarpımına $n$ faktöriyel denir ve $n!$ sembolü ile gösterilir.*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

- *Özel olarak $0! = 1$ ve $1! = 1$'dir.*

**UYARI**

$n!$ ($n$ faktöriyel) saymanın temel ilkesine göre $n$ farklı nesnenin farklı sıralanışlarının sayısını verir.

**Tarih Kutusu**

$n!$ *($n$ faktöriyel)* şeklindeki faktöriyel sembolünü tarihte ilk kez 1808 yılında Fransız matematikçi **Christian Kramp** *(Kristiyan Kram)* **(1760 – 1826)** kullanmıştır.

** A History of Mathematical Notations.*

**8. Örnek**

**Aşağıdaki ifadelerin değerini bulalım.**

**a.** $4!$ **b.** $\frac{6!}{4!}$ **c.** $\frac{8!}{5!.4!}$

**Çözüm**

**a.** $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

**b.** $\frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = 6 \cdot 5 = 30$

**c.** $\frac{8!}{5!.4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \,.\, 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 14$

*$n \geq 1$ olmak üzere,*

- *$n! = n \cdot (n-1)!$ ve $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$ olur.*

**9. Örnek**

**Aşağıdaki ifadeleri *(faktöriyel kullanarak)* çarpım şeklinde ifade edelim.**

**a.** $7! - 5!$ **b.** $10! + 9! - 8!$

**Çözüm**

**a.** $7! - 5! = 7 \cdot 6 \cdot 5! - 5!$
$= 5! \cdot (42 - 1)$
$= 5! \cdot 41$

**b.** $10! + 9! - 8! = 10 \cdot 9 \cdot 8! + 9 \cdot 8! - 8!$
$= 8! \cdot (90 + 9 - 1)$
$= 8! \cdot 98$

**10. Örnek**

$\dfrac{(n+3)!-(n+2)!}{(n+1)!+n!}$ **ifadesini en sade şekilde yazalım.**

**Çözüm**

$$\frac{(n+3)!-(n+2)!}{(n+1)!+n!} = \frac{(n+3)\cdot(n+2)!-(n+2)!}{(n+1)\cdot n!+n!}$$

$$= \frac{(n+2)!\cdot(n+3-1)}{n!\cdot(n+1+1)}$$

$$= \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot \cancel{n!}\cdot \cancel{(n+2)}}{\cancel{n!}\cdot \cancel{(n+2)}}$$

$$= (n+2)\cdot(n+1)$$

## 1.1.2 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Nida ve Murat hafta sonu sinemaya gidip uzun zamandır izlemek istedikleri 5 filmi arka arkaya izlemek istiyorlar. Bütün filmler tüm seanslarda izlenebileceğine göre Nida ve Murat'ın filmleri kaç farklı şekilde izleyebileceklerini yukarıdaki tabloyu uygun şekilde doldurarak bulunuz.

*Tablo:* Seanslar ve Seçenek Sayısı

| **Seans** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Seçenek Sayısı** | | | | | |

**2.** Sırasıyla $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 10$ için $n!$ değerini hesaplayınız.

**3.** Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz veya bu ifadeleri en sade şekilde yazınız.

**a.** $\dfrac{7!}{6!}$ **b.** $\dfrac{9!}{7!}$ **c.** $\dfrac{5!}{6!}$ **ç.** $\dfrac{100!}{99!}$

**d.** $\dfrac{n!}{(n-2)!}$ **e.** $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$ **f.** $\dfrac{9!}{6!\cdot 3!}$ **g.** $\dfrac{n!}{(n-3)!\cdot(n-1)!}$

**4.** Aşağıdaki ifadeleri *(faktöriyel kullanarak)* çarpım şeklinde ifade ediniz.

**a.** $6! + 5!$ **b.** $8! - 7!$ **c.** $10! - 7!$

**ç.** $9! + 8! + 7!$ **d.** $6! - 5! + 7!$ **e.** $2\cdot 9! - 3\cdot 8!$

**5.** Aşağıdaki ifadeleri en sade şekilde yazınız.

**a.** $\dfrac{12!-11!}{11}$ **b.** $\dfrac{10!-9!}{9!}$ **c.** $\dfrac{7!+6!-5!}{5!+6!}$

**ç.** $\dfrac{n!+(n-1)!}{(n-1)!}$ **d.** $\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)}$ **e.** $\dfrac{(n+2)!-(n+1)!}{n!+(n-1)!}$

## Permütasyon

### 11. Örnek

Şule, yakın arkadaşları Aslı, Burcu ve Ceyda'yı telefonla aramak istiyor.

**Şule'nin arkadaşlarını kaç farklı sırayla arayabileceğini bulalım.**

**Çözüm**

Sıralamayı yaparken Aslı, Burcu ve Ceyda'nın isimleri yerine baş harfleri olan A, B ve C'yi kullanalım. K = {A, B, C} olmak üzere K kümesinin elemanlarının farklı sıralanışları aşağıda gösterilmiştir:

ABC ACB BAC
BCA CAB CBA

O hâlde Şule, arkadaşlarını 6 farklı şekilde arayabilir.

K kümesinin elemanlarının her farklı sıralanışına **K'nin bir permütasyonu** denir.

**Şimdi de K kümesinin iki elemanının farklı sıralanışlarını yazalım.**

AB BA AC
CA BC CB

K kümesinin iki elemanlı her sıralı ikilisine **K'nin 2'li permütasyonu** denir.

---

*Permütasyon*

*$n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$ ve $n \geq r$ olmak üzere,*

- *n elemanlı, sonlu bir A kümesinin elemanlarının birbirinden farklı her sıralanışına (sırasıyla dizilişine), A kümesinin bir permütasyonu denir.*
- *n elemanlı bir kümenin r li tüm permütasyonlarının sayısı,*

$$P(n, r) = P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ olur.}$$

- *n elemanlı bir kümenin permütasyonlarının sayısı, $P(n, n) = n!$ olur.*

### 12. Örnek

**Aşağıda istenenleri bulalım.**

**a.** $P(6, 3) = ?$ **b.** $P(n, 2) = 20$ ise $n = ?$

**Çözüm**

**a.**
$$P(6, 3) = \frac{6!}{(6-3)!}$$
$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}}$$
$$= 120$$

**b.**
$$P(n, 2) = 20 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 20$$
$$\Rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 20$$
$$\Rightarrow n \cdot (n-1) = 4 \cdot 5$$
$$\Rightarrow n = 5$$

## 13. Örnek

**A = {1, 2, 3, 4, 5} kümesinin 3'lü permütasyonlarının kaç tanesinde "1" vardır, bulalım.**

**Çözüm**

s(A) = 5 olup A kümesinin 3'lü permütasyonlarının sayısı,

A kümesinin tüm 3'lü permütasyonlarının sayısı ← $P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!}$

$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!}$

$= 60$'tır.

A kümesinin "1" elemanını içermeyen en geniş alt kümesi B = {2, 3, 4, 5} olup B'nin 3'lü permütasyonlarının sayısı,

A kümesinin içinde "1" bulunmayan tüm 3'lü permütasyonlarının sayısı ← $P(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!}$

$= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!}{1!} = 24$'tür.

O hâlde istenen cevap,

A kümesinin içinde "1" bulunan tüm 3'lü permütasyonlarının sayısı ← $P(5, 3) - P(4, 3) = 60 - 24 = 36$'dır.

## 14. Örnek

6 kişi;

**a.** 4 kişilik koltuğa,

**b.** 6 kişilik koltuğa,

**c.** Belli ikisi yan yana gelecek şekilde 6 kişilik koltuğa,

**ç.** Belli ikisi yan yana gelmeyecek şekilde 6 kişilik koltuğa

kaç farklı şekilde oturabilir?

**Çözüm**

**a.** $P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!}$

$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!}$

$= 360$

**b.** $P(6, 6) = 6!$

$= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$= 720$

**c.** $K_1$ $\boxed{K_2 \quad K_3}$ $K_4$ $K_5$ $K_6$

6 kişiden 2'sini bir kişi olarak düşünelim. Bu durumda kişi sayısı 5 olup 5 kişi $5!$ farklı şekilde sıralanabilir. Ayrıca yan yana gelecek 2 kişi kendi aralarında $2!$ farklı şekilde sıralanabileceğinden çarpmanın temel ilkesine göre verilen koşullarda 6 kişi bir koltuğa,

$5! \cdot 2! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1$

$= 240$ farklı şekilde oturabilir.

**ç.** b'de bulduğumuz sonuçtan c'de bulduğumuz sonucu çıkarmalıyız:

$6! - 5! \cdot 2! = 720 - 240$

$= 480$

---

### 15. Örnek

**Birbirinden farklı 4 matematik, 3 fizik ve 2 kimya kitabı bir rafa sıralanacaktır. Aşağıdaki soruların cevaplarını bulalım.**

**a.** Kitaplar kaç farklı şekilde sıralanabilir?

**b.** Matematik kitapları bir arada olmak koşuluyla tüm kitaplar kaç farklı şekilde sıralanabilir?

**c.** Aynı türden kitaplar bir arada olmak koşuluyla tüm kitaplar kaç farklı şekilde sıralanabilir?

**Çözüm**

**a.** Herhangi bir koşul bulunmadığından $4 + 3 + 2 = 9$ kitabı,
$P(9, 9) = 9!$ farklı şekilde sıralayabiliriz.

**b.** Matematik kitapları bir arada olacağından 4 matematik kitabını 1 kitap gibi düşünebiliriz.

Bu durumda kitap sayısını $1 + 3 + 2 = 6$ olarak düşünürsek,

$\boxed{M_1 \quad M_2 \quad M_3 \quad M_4}$ $F_1$ $F_2$ $F_3$ $K_1$ $K_2$

6 kitabı $P(6, 6) = 6!$ farklı şekilde sıralayabiliriz.

Ayrıca, 4 matematik kitabı kendi aralarında $P(4, 4) = 4!$ biçimde sıralanır. O hâlde bu kitaplar, matematik kitapları bir arada olmak koşuluyla, saymanın temel ilkesine göre,

$6! \cdot 4! = 17280$ farklı şekilde sıralanır.

**c.** Aynı türden kitaplar bir arada olacağından matematik kitapları 1, fizik kitapları 1 ve kimya kitapları 1 kitap gibi düşünebilir. Bu durumda kitap sayısını $1 + 1 + 1 = 3$ olarak düşünürsek,

$M_1$ $M_2$ $M_3$ $M_4$ | $F_1$ $F_2$ $F_3$ | $K_1$ $K_2$

3 kitabın sıralanış sayısı, $P(3, 3) = 3!$ olur.

Ayrıca, 4 matematik kitabı $P(4, 4) = 4!$ ; 3 fizik kitabı $P(3, 3) = 3!$ ve 2 kimya kitabı $P(2, 2) = 2!$ farklı şekilde kendi aralarında sıralanır. O hâlde sıralanışların sayısı,

$3! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! = 1728$ olur.

## 1.1.3 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** $A = \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin;

**a.** 1'li **b.** 2'li **c.** 3'lü **ç.** 4'lü

permütasyonlarını yazınız.

**2.** Aşağıda istenenleri bulunuz.

**a.** $P(4, 1)$ **b.** $P(5, 1)$ **c.** $P(3, 3)$ **ç.** $P(6, 6)$

**d.** $P(7, 2)$ **e.** $P(8, 3)$ **f.** $P(n, 3) = 60$ ise $n = ?$

**3.** Aşağıdaki eşitliklere göre n değerini bulunuz.

**a.** $5 \cdot P(n - 1, 2) = P(n, 3)$ **b.** $3 \cdot P(n, 3) = 2 \cdot P(n + 1, 3)$

**4.** $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesinin 3'lü permütasyonlarının kaç tanesinde;

**a.** "a" bulunmaz? **b.** "a" bulunur?

**c.** "a" bulunur, "b" bulunmaz? **ç.** "a" veya "b" bulunur?

**5.** 5 erkek ve 4 kadın yan yana sıralanacaktır. Buna göre;

**a.** Bu 9 kişi kaç farklı şekilde sıralanabilir?

**b.** 9 kişiden herhangi 4'ü kaç farklı şekilde sıralanabilir?

**c.** Kadınların yan yana gelmesi koşuluyla 9 kişi kaç farklı şekilde sıralanabilir?

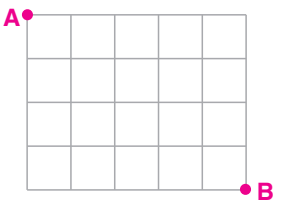
**ç.** Kadınlardan herhangi ikisinin yan yana gelmemesi koşuluyla 9 kişi kaç farklı şekilde sıralanabilir?

**d.** 9 kişiden belli ikisinin yan yana gelmemesi koşulu ile bu 9 kişi kaç farklı şekilde sıralanabilir?

## Tekrarlı Permütasyon

Günlük Hayat Bağlantısı

Yandaki şekilde çizgiler, bir kentin dik kesişen sokaklarını göstermektedir. Bir taksi şoförü A noktasından aldığı bir müşteriyi B noktasına en kısa yolu izleyerek kaç farklı şekilde götürebilir? Tartışınız.




### 16. Örnek

**GEOMETRİ sözcüğündeki harfler kullanılarak anlamlı ya da anlamsız 8 harfli kaç harf dizilimi yazılabileceğini bulalım.**

#### Çözüm

GEOMETRİ sözcüğündeki 8 harfin her biri birbirinden farklı olsaydı bu harfler kullanılarak $P(8, 8) = 8!$ farklı harf dizilimi yazılabilirdi.

GEOMETRİ sözcüğündeki iki E harfinin kendi aralarında yer değiştirmesi yeni bir sıralama olmayacaktır. İki E harfi birbirinden farklı olsaydı $P(2, 2) = 2!$ farklı şekilde sıralanabilecekti. O hâlde GEOMETRİ sözcüğündeki 8 harfle,

$$\frac{P(8, 8)}{P(2, 2)} = \frac{8!}{2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 20160$$ harf dizilimi yazılabilir.

## İnceleyelim

**$r, n \in \mathbb{Z}^+$ ve $r < n$ olmak üzere r tanesi birbirinin aynı, $n - r$ tanesi de birbirinden farklı olan n tane elemanın, birbirinden farklı sıralanışlarının sayısının nasıl bulunacağını açıklayalım:**

Birbirinin aynı iki elemanın yer değiştirmesi, yeni bir sıralama olmayacaktır. Birbirinin aynı r tane elemanı bir an için farklı kabul ederek $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r$ ile gösterelim.

Birbirinden farklı $n - r$ tane elemanı da $b_{r+1}, b_{r+2}, \ldots, b_n$ ile gösterelim.

$$\underbrace{\overbrace{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r}^{\text{Aynı Elemanlar}}, \overbrace{b_{r+1}, b_{r+2}, \ldots, b_n}^{\text{Farklı Elemanlar}}}_{n \text{ tane}}$$

Bu $n$ elemanın tüm sıralanışlarının sayısı $n!$, $a_1, a_2, \ldots, a_r$ elemanlarının kendi aralarındaki sıralanışlarının sayısı $r!$ olur. Ancak bunlar aynı eleman olduğundan $r!$ sıralama aslında tek bir sıralamadır. $n$ tane elemanın birbirinden farklı sıralanışına $k$ dersek,

$$k = \frac{n!}{r!} \text{ olur.}$$

Benzer şekilde, $n$ tane elemanın $p$ tanesi birbirinin aynı, bunlardan başka $q$ tanesi birbirinin aynı ve $r$ tanesi de birbirinin aynı ise bu $n$ tane elemanın sıralanış sayısı,

$$\frac{n!}{p! \cdot q! \cdot r!} \text{ olur.}$$

### 17. Örnek

**MATEMATİK sözcüğündeki harfleri kullanarak anlamlı ya da anlamsız 9 harfli kaç harf dizilimi yazılabileceğini bulalım.**

**Çözüm**

MATEMATİK sözcüğünde 9 harf olduğundan $n = 9$'dur. Bu sözcükte 2 tane M olduğundan $p = 2$, 2 tane A olduğundan $q = 2$, 2 tane T olduğundan $r = 2$'dir. O hâlde oluşacak harf dizilimlerinin sayısı,

$$\frac{n!}{p! \cdot q! \cdot r!} = \frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 45\,360 \text{ olur.}$$

### 18. Örnek

**KELEBEK sözcüğündeki harfler kullanılarak anlamlı ya da anlamsız, E ile başlayıp L ile biten 7 harfli kaç farklı harf dizilimi yazılabileceğini bulalım.**

**Çözüm**

Yazılacak sözcükler E ile başlayıp L ile biteceğinden bu iki harf sıralamaya katılmaz.

E K E B E K L

Geriye kalan K, E, B, E, K harfleri ile kaç farklı sözcük yazabileceğimizi bulalım:

KEBEK sözcüğünde 2 tane K, 2 tane E ve 1 tane B olup toplam 5 harf olduğundan oluşacak sözcük sayısı,

$$\frac{5!}{2! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 2!} = 30 \text{ olur.}$$

Dolayısıyla KELEBEK sözcüğündeki harflerle E ile başlayıp L ile biten 30 farklı sözcük yazılabilir.

## 19. Örnek

**330505 sayısındaki rakamların yerleri değiştirilerek 6 basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabileceğini bulalım.**

### Çözüm

Verilen sayıda 2 tane 3, 2 tane 0 ve 2 tane 5 rakamı vardır. Bu rakamların farklı sıralanışlarının sayısı,

$$\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 2\cdot 2}=90 \text{ olur.}$$

Ancak 0 ile başlayan sıralamalar da olacağından bu sıralamaların hepsi 6 basamaklı olmaz.

*Örneğin,*
*003355 sayısı*
*6 basamaklı değil*
*4 basamaklı bir sayıdır.*

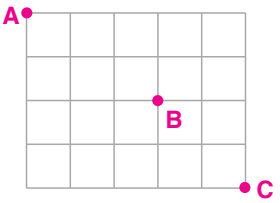
330505 sayısındaki bu altı rakamdan iki tanesi 0 olduğundan bu rakamlarla oluşturulan 90 farklı dizilişten $\frac{1}{3}$'ü 6 basamaklı değildir.

O hâlde $90\cdot\frac{1}{3}=30$ olduğundan geriye kalan,

$90-30=60$ sayı 6 basamaklıdır.

## 20. Örnek

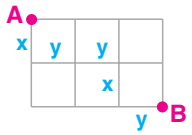
**Yandaki şekilde çizgiler birbirini dik kesen sokakları göstermektedir. Buna göre A'dan C'ye, B'ye uğramak koşulu ile en kısa yoldan kaç farklı şekilde gidilebileceğini bulalım.**




### Çözüm

Önce A'dan B'ye kaç farklı şekilde gidileceğini bulalım:

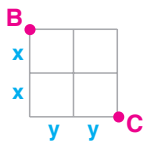
*Şekil 1*




A'dan B'ye giden kısa yolların her birini, içinde 2 tane x ve 3 tane y olan 5'li harf dizisi ile gösterebiliriz. Bunlardan biri "Şekil 1"de görüldüğü gibi xyyxy dizisidir. O hâlde A'dan B'ye, en kısa yolu izleyerek,

$$\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10 \text{ farklı şekilde gidilebilir.}$$

*Şekil 2*




Benzer şekilde B'den C'ye, en kısa yolu izleyerek,

$$\frac{(2+2)!}{2!\cdot 2!}=6 \text{ farklı şekilde gidilebilir.}$$

A'dan B'ye, 10; B'den C'ye, 6 farklı şekilde gidiliyorsa A'dan C'ye,

$10\cdot 6=60$ farklı şekilde en kısa yoldan gidilir.

## 1.1.4 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** PASAPORT sözcüğündeki harflerin yerleri değiştirilerek anlamlı ya da anlamsız;

**a.** 8 harfli kaç farklı harf dizilimi yazılabilir?

**b.** A ile başlayan ve A ile biten 8 harfli kaç farklı harf dizilimi yazılabilir?

**c.** A ile başlayan ve P ile bitmeyen 8 harfli kaç farklı harf dizilimi yazılabilir?

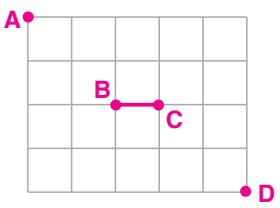
**2.** Özdeş 3 sarı, 2 kırmızı ve 3 mavi boya kalemi mavi olanlar bir arada olmak koşulu ile yan yana kaç farklı şekilde sıralanabilir?

**3.** Aşağıdaki sayıların rakamları ile 7 basamaklı kaç farklı doğal sayı yazılabilir?

**a.** 4 455 333 **b.** 4 400 333

**4.** 330 527 sayısının rakamları ile 6 basamaklı kaç çift sayı yazılabilir?

**5.** Yandaki şekilde çizgiler birbirini dik kesen sokakları göstermektedir. Buna göre A noktasından D noktasına en kısa yoldan gitmek isteyen bir kişi;




**a.** Kaç değişik yol izleyebilir?

**b.** B ye uğrayarak kaç değişik yol izleyebilir?

**c.** B ile C noktaları arasındaki yoldan geçmeden kaç değişik yol izleyebilir?

# 1.1.1 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI

**1.** Bir okulda 16 sınıf ve her sınıfta 20 öğrenci varsa bu okulda kaç öğrenci vardır?

**2.** Disiplin kurulunda görev almak üzere 15 öğretmen arasından 1 başkan ve 1 başkan yardımcısı kaç farklı şekilde seçilebilir?

**3.** Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

**a.** 2 mektup 2 posta kutusuna,

**b.** 2 mektup 3 posta kutusuna,

**c.** 3 mektup 2 posta kutusuna

kaç farklı şekilde atılabilir?

**4.** Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

**a.** 3 farklı madenî para 4 kumbaraya kaç farklı şekilde atılabilir?

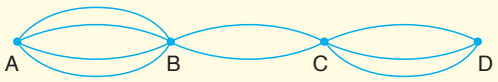
**b.** Bir kumbaraya en çok 1 madenî para atmak koşuluyla 3 farklı madenî para 4 kumbaraya kaç farklı şekilde atılabilir?

**5.** 20 kişinin katıldığı bir memuriyet sınavında adayların sınavı kazanıp kazanmama durumları kaç farklı şekilde gerçekleşebilir?

**6.** Çoktan seçmeli 10 sorudan oluşan bir sınavda, her soru için öğrenciler A, B, C, D, E seçeneklerinden birini işaretleyebilirler.

Buna göre bir öğrenci tüm soruları kaç farklı şekilde cevaplayabilir?

**7.**



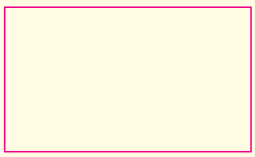

Yukarıdaki yol haritasında A, B, C ve D şehirleri arasındaki yollar gösterilmiştir. Buna göre;

**a.** A'dan D'ye gitmek isteyen bir kişi kaç farklı rota kullanabilir?

**b.** A'dan D'ye gidip tekrar A'ya dönmek isteyen bir kişi kaç farklı rota kullanabilir?

**c.** A'dan D'ye gidip tekrar A'ya dönmek isteyen bir kişi gittiği yollardan dönmemek koşulu ile kaç farklı rota kullanabilir?

**8.** Yandaki dikdörtgenin köşeleri A, B, C ve D harfleri ile isimlendirilecektir.



Buna göre;

**a.** Harfler saat yönünde alfabetik sırada olması koşulu ile,

**b.** Harflerin alfabetik sırada olması koşulu ile,

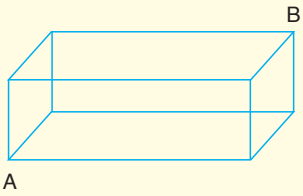
**c.** Harflerin yerleşimi rastgele olacaksa,

isimlendirme işlemi kaç farklı şekilde yapılabilir?

# 1.1.1 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI

**9.** 8 takımın katıldığı bir basketbol turnuvasının 1 ve 2.si kaç farklı şekilde oluşabilir?

**10.** Yanda dikdörtgenler prizması şeklinde telden yapılmış bir cisim görmektesiniz.




A noktasından hareket eden bir karınca tel üzerinden ve en kısa yoldan giderek kaç farklı şekilde B noktasına ulaşır?

**11.** Bir toplantıda herkes birbiri ile tokalaşmıştır. Toplam 105 tokalaşma olduğuna göre toplantıda kaç kişi vardır?

**12.** {0, 1, 2, 3, 4, 5} kümesinin elemanları ile;

**a.** Üç basamaklı kaç sayı yazılabilir?

**b.** Rakamları farklı üç basamaklı kaç sayı yazılabilir?

**c.** Üç basamaklı kaç çift sayı yazılabilir?

**ç.** Üç basamaklı ve rakamları farklı kaç çift sayı yazılabilir?

**d.** 5 ile bölünebilen üç basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?

**e.** 5 ile bölünebilen üç basamaklı, rakamları farklı kaç sayı yazılabilir?

**13.** {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} kümesinin elemanları ile 2000'den büyük, 5000'den küçük, rakamları farklı, dört basamaklı kaç çift sayı yazılabilir?

**14.** {1, 2, 3, 4, 5} kümesinin elemanları kullanılarak yazılan, rakamları birbirinden farklı tüm dört basamaklı sayılar küçükten büyüğe doğru sıralanıyor.

Baştan 97. sıradaki sayı kaçtır?

**15.** {1, 2, 3, 4, 5} kümesinin elemanları kullanılarak yazılan rakamları birbirinden farklı tüm üç basamaklı sayıların toplamı kaçtır?

**16.** Türk plaka standartlarına göre sivil plakaların karakter sayısı toplam 7 veya 8 olmalıdır. Plakaların 1. kısmı plakanın kayıtlı olduğu ilin kodunu göstermektedir. Plakadaki toplam karakter sayısı, plakanın 2. kısmını oluşturan harf sayısıyla doğrudan ilişkilidir. İkinci kısım 1, 2 veya 3 harften oluşmalıdır. 2. kısımda 1 harf varsa 3. kısımda 4 rakam, 2 harf varsa 3 veya 4 rakam, 3 harf varsa 2 rakam olur. Örneğin, Ankara ilimiz için düzenlenmiş bir sivil araç plakası aşağıdaki gibidir:

| | Harf | Sayı |
|---|---|---|
| 06 | ABC | 01 |

Buna göre Ankara için kaç değişik sivil araç plakası oluşturulabilir? *(Plakaların 2. kısmında alfabemizdeki 29 harfin hepsinin kullanılabileceğini varsayınız.)*

**17.** Aşağıdaki işlemleri yapınız.

**a.** $0! + 1!$

**b.** $\frac{9!}{7!}$

**c.** $\frac{4! \cdot 7!}{9!}$

**ç.** $(2!)!$

**d.** $5! - 4! - 3!$

**e.** $\frac{5! + 6!}{5!}$

**f.** $\frac{9! + 7!}{9! - 7!}$

**g.** $\frac{(3!)!}{5!}$

**ğ.** $\frac{2 \cdot 8! + 4 \cdot 7!}{9! + 8!}$

**h.** $\frac{(n+2)!}{(n+1)!}$

**ı.** $\frac{(n-1)! + n!}{(n+1)! - n!}$

**i.** $\frac{(n+2)! - (n+1)!}{(n+1)! - n!}$

**j.** $\frac{(n-1)! - (n-2)!}{(n-1)! + n!}$

**k.** $\frac{(2n-1)! + (2n-2)!}{(2n)! + (2n+1)!}$

**18.** Birinci sütundaki eşitliklerin her birinde, n'nin alabileceği değerleri bularak ikinci sütunda verilenlerle eşleştiriniz.

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 20$ | I. | a. 1 |
| $\frac{n!}{(n-2)!} - \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = -12$ | II. | b. 4 |
| $\frac{(2n+2)!}{(2n-1)!} = 24n$ | III. | c. 6 |
| $(n+1)! - 2 \cdot n! = 56 \cdot (n-1)!$ | IV. | ç. 8 |
| | | d. 10 |

**19.** ***Tablo:*** Ödüller

| | |
|---|---|
| Birinci kişiye | Bir araba |
| İkinci kişiye | Bir hafta tam pansiyon tatil |
| Üçüncü kişiye | Plazma TV |
| Dördüncü kişiye | 1000 TL hediye çeki |

Bir süpermarketler zinciri, kuruluşunun 10. yıl dönümü nedeniyle müşterilerine çekilişle yukarıdaki tabloda verilen hediyeleri dağıtacaktır. Bu hediyelerin çekilişe katılmaya hak kazanan müşteriler arasından seçilen 25 finaliste kaç farklı şekilde verilebileceğini bulunuz.

**20.** Aşağıda istenenleri bulunuz.

**a.** 6 farklı kitap bir rafa kaç farklı şekilde sıralanabilir?

**b.** 8 tablodan üçü yan yana kaç farklı şekilde asılabilir?

**21.** Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına "D", yanlış olanların başına "Y" yazınız.

**a.** ☐ $\frac{7!}{6!} = \frac{7}{6}$

**b.** ☐ $\frac{6!}{3!} = 2!$

**c.** ☐ 6 kişi, bir bank üzerine, yan yana $6!$ farklı şekilde oturabilir.

**ç.** ☐ MAKİNE sözcüğündeki harflerle anlamlı ya da anlamsız, 6 harfli, A harfi ile biten $5!$ harf dizilimi yazılabilir.

**22.** Aşağıda sol sütunda verilen soruların cevaplarını sağ sütundan bularak bunları eşleştiriniz.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $2 \cdot P(5, 2) + 3 \cdot P(6, 4)$ işleminin sonucu kaçtır? | I. | a. | 3024 |
| 4 kişi, 6 koltuğa kaç farklı şekilde oturabilir? | II. | b. | 1120 |
| $3 \cdot P(5, n) = 2 \cdot P(6, n)$ ise $n = ?$ | III. | c. | 3 |
| $2 \cdot P(n, 2) = P(n + 1, 2)$ ise $n = ?$ | IV. | ç. | 360 |
| Rakamları farklı, basamaklarında sıfırın kullanılmadığı 4 basamaklı kaç doğal sayı yazılabilir? | V. | d. | 2 |
| | | e. | 4 |

**23.** Birbirinden farklı, 6 matematik ve 5 Türkçe kitabı, Türkçe kitapları yan yana olmak koşulu ile bir rafa kaç farklı şekilde dizilebilir?

A) $11!$ B) $7! \cdot 6!$ C) $7! \cdot 5!$

D) $6! \cdot 5!$ E) $6! + 5!$

**24.** "– 5 fil bir otomobile nasıl biner?
– İkisi öne, üçü arkaya!"

Yukarıdaki diyalog hepimizin bildiği bir espridir. Peki ikisi önde diğer üçü arkada oturmak koşuluyla 5 fil bir otomobile kaç farklı şekilde oturabilir?

**25.** Bir filmde rol alan 15 aktörün isimleri, film başlarken tanıtılmaktadır.

Başrol oyuncusunun isminin ilk veya son sırada yazılması koşuluyla kaç farklı şekilde tanıtım mümkündür?

**26.** 3 kız ve 4 erkek öğrenci bir sırada yan yana oturacaktır. Buna göre;

a. Yan yana kaç farklı şekilde oturabilirler?

b. Kız öğrenciler hep yan yana olmak koşulu ile kaç farklı şekilde oturabilirler?

c. Kız öğrenciler birbirinden, erkek öğrenciler de birbirinden ayrılmamak koşulu ile kaç farklı şekilde oturabilirler?

ç. Kız öğrenciler hiç yan yana gelmemek koşulu ile kaç farklı şekilde oturabilirler?

d. Bir erkek – bir kız öğrenci düzeninde yan yana kaç farklı şekilde oturabilirler?

**27.** 7 kız ve 4 erkek, erkeklerden herhangi ikisi yan yana gelmemek koşulu ile yan yana kaç farklı şekilde oturabilir?

**28.** 5 kız ve 5 erkek aynı cinsiyetten iki kişi yan yana gelmemek koşulu ile aynı sıradaki 10 koltuğa kaç farklı şekilde oturabilir?

**29.** Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına "D", yanlış olanların başına "Y" yazınız.

a. ☐ ANKARA sözcüğündeki harfleri kullanarak anlamlı ya da anlamsız 6 harfli 120 harf dizilimi yazılabilir.

b. ☐ 13111344 sayısındaki rakamların yerleri değiştirilerek birbirinden farklı, 8 basamaklı 420 sayı yazılabilir.

c. ☐ TEKETEK sözcüğündeki harfleri kullanarak T ile başlayan ve K ile bitmeyen, 7 harfli anlamlı ya da anlamsız, birbirinden farklı 50 harf dizilimi yazılabilir.

## Kombinasyon

Günlük Hayat Bağlantısı

Kadir'in tarih, bilim, mitoloji, edebiyat ve eğitim türlerinde yazılmış beş kitaptan üçünü, çalıştığı kitapçının vitrinindeki rafa sıralaması gerekiyor.

**a.** Kadir üç kitabı, beş kitap arasından kaç farklı şekilde seçebilir?

**b.** Kadir beş kitaptan üçünü kaç farklı şekilde sıralayabilir?

Bu iki soru neden farklıdır?

### 21. Örnek

**Yukarıda belirtilen durumu ele alalım. Önce Kadir'in beş kitaptan üçünü bir rafa kaç farklı şekilde sıralayabileceğini sonra beş kitaptan üçünün kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulalım.**

#### Çözüm

Şimdiye kadar öğrendiğimiz bilgilerle Kadir'in 5 kitaptan üçünü bir rafa $P(5, 3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ farklı şekilde dizebileceğini bulabiliriz. Bu 60 farklı diziliş yandaki tablo ile gösterilmiştir.

Dikkat ederseniz 1, 3, 5, 7, 9 ve 10 numaralı sıralanışlar aynı kitap türlerinin seçimini içerir. Seçilen her farklı üç kitap türü için $3! = 6$ farklı sıralama yapılabilir. Yani sıralama dikkate alınmazsa $\frac{60}{3!}$ farklı şekilde 5 kitaptan 3'ü seçilebilir.

Burada olduğu gibi 5 elemanlı bir kümenin 3 elemanlı her alt kümesi bu kümenin 3'lü kombinasyonudur. Kombinasyonda sıralama önemli değildir.

*Tablo:* Beş Kitaptan Üçünün Bir Rafa Farklı Sıralanışları

| Sıralama | Kitap Türleri | | |
|---|---|---|---|
| **1** | **Tarih** | **Bilim** | **Mitoloji** |
| **2** | Edebiyat | Tarih | Bilim |
| **3** | **Bilim** | **Tarih** | **Mitoloji** |
| **4** | Edebiyat | Mitoloji | Eğitim |
| **5** | **Bilim** | **Mitoloji** | **Tarih** |
| **6** | Eğitim | Edebiyat | Bilim |
| **7** | **Tarih** | **Mitoloji** | **Bilim** |
| **8** | Bilim | Tarih | Eğitim |
| **9** | **Mitoloji** | **Bilim** | **Tarih** |
| **10** | **Mitoloji** | **Tarih** | **Bilim** |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| **60** | Eğitim | Bilim | Tarih |

*Kombinasyon*

- *$n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$ ve $n \geq r$ olmak üzere,*
- *$n$ elemanlı bir kümenin $r$ elemanlı her alt kümesine bu kümenin $r$'li kombinasyonu denir. $C(n, r)$ veya $\binom{n}{r}$ sembollerinden biri ile gösterilir.*

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

- *Permütasyonda sıra önemli iken kombinasyonda sıra önemli değildir.*

## 22. Örnek

**Aşağıdaki ifadelerin değerini bulalım** $(n \in \mathbb{Z}^+)$.

**a.** $\binom{n}{0}$ **b.** $\binom{n}{1}$ **c.** $\binom{n}{n}$ **ç.** $\binom{7}{2}$ **d.** $\binom{10}{3}$

**Çözüm**

**a.** $\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!\cdot \underbrace{0!}_{1}} = \frac{n!}{n!} = 1$

**b.** $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!} = n$

**c.** $\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)!\cdot n!} = \frac{n!}{\underbrace{0!}_{1}\cdot n!} = 1$

**ç.** $\binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)!\cdot 2!} = \frac{7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\cdot 2\cdot 1} = 21$ veya kısaca

$\binom{7}{2} = \frac{7\cdot 6}{2\cdot 1} = 21$ yazabiliriz.

**d.** $\binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$

**UYARI**

Burada da görüldüğü gibi

$$\binom{n}{r} = \frac{\overbrace{n.(n-1).(n-2).....(n-r+1)}^{r \text{ tane}}}{\underbrace{r.(r-1).(r-2).....1}_{r!}}$$

şeklinde yazılabilir.

---

*$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere;*

**a.** $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ *'dir.* **b.** $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$ *'dir.* **c.** $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ *'dir.*

*Aşağıda c'deki eşitliğin doğruluğu gösterilmiştir. Siz de a ve b'deki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.*

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{[n-(n-r)]!\cdot(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

---

## 23. Örnek

**$2 \cdot C(n, 2) = C(2n, 1)$ ise $n$ değerini bulalım.**

**Çözüm**

$$2\cdot C(n,2) = C(2n,1) \Rightarrow 2\cdot\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} = \frac{2n!}{(2n-1)!\cdot 1!}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{2}\cdot n\cdot(n-1)\cdot\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}\cdot\cancel{2}} = \frac{2n\cdot\cancel{(2n-1)!}}{\cancel{(2n-1)!}\cdot 1}$$

$$\Rightarrow n\cdot(n-1) = 2n$$

$$\Rightarrow n^2 - 3n = 0$$

$$\Rightarrow n\cdot(n-3) = 0$$

$$\Rightarrow n = 0 \text{ veya } n = 3 \text{ bulunur.}$$

$n = 0$ olamayacağından $n = 3$'tür.

## 24. Örnek

**Bir basketbol takımı koçunun, hafta sonu oynanacak karşılaşma için 5 kişilik bir takımı, takımda oynayan 10 basketbolcu arasından kaç farklı biçimde oluşturabileceğini bulalım.**

### Çözüm

10 kişilik gruptan 5 kişi seçerken sıra önemli değildir. Örneğin, bu takımın {Ali, Can, Seçkin, Suat, Okan} veya {Can, Seçkin, Okan, Ali, Suat} olması farklı seçim olmaz. Bu nedenle seçimi kombinasyonla yaparız. O hâlde oluşturulacak 5 kişilik grupların sayısı,

$$C(10,5)=\frac{P(10,5)}{5!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=252 \text{ olur.}$$

## 25. Örnek

**A = {a, b, c, d, e, f, g} kümesinin;**

**a. 5 elemanlı kaç alt kümesi olduğunu bulalım.**

**b. 5 elemanlı alt kümelerinin kaç tanesinde a ve b bulunur, c bulunmaz, bulalım.**

### Çözüm

**a.** $s(A)=7$ olup A'nın 5 elemanlı alt kümelerinin sayısı 7'nin 5'li kombinasyonlarının sayısı kadardır.

$$\binom{7}{5}=\binom{7}{2}=\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}=21 \text{ tanedir.}$$

$A = \{\overset{\checkmark}{a}, \overset{\checkmark}{b}, \overset{\times}{c}, d, e, f, g\}$

$\{\underline{a}, \underline{b}, \_, \_, \_\}$

**b.** Aradığımız 5 elemanlı alt kümelerin iki elemanı a ve b'dir. Bu kümelerin her birinde a ve b elemanı bulunup c elemanı bulunmayacağından diğer üç eleman {d, e, f, g} kümesinin elemanları arasından yandaki gibi seçilmelidir. O hâlde istenen koşullarda,

$$\binom{4}{3}=\binom{4}{1}=4 \text{ alt küme vardır.}$$

## 26. Örnek

**3 erkek ve 2 kadından oluşacak bir grubun, 6 erkek ve 4 kadın arasından kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulalım.**

### Çözüm

6 erkek arasından 3 erkeği, $C(6,3)$;

4 kadın arasından 2 kadını da $C(4,2)$ kadar farklı şekilde seçebiliriz.

O hâlde bu seçimi,

$$C(6,3)\cdot C(4,2)=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{4\cdot3}{2\cdot1}$$

$$=20\,.\,6=120 \text{ farklı şekilde yapabiliriz.}$$

---

**27. Örnek**

**5 farklı matematik ve 4 farklı Türkçe kitabından, 3 matematik ve 2 Türkçe kitabını, bir kitaplığın rafına kaç farklı şekilde sıralayabileceğimizi bulalım.**

**Çözüm**

5 farklı matematik kitabından 3'ü $C(5,3)$ farklı şekilde seçilebilir.

4 farklı Türkçe kitabından 2'si $C(4,2)$ farklı şekilde seçilebilir.

Seçilen bu kitaplar,

$$C(5,3)\cdot C(4,2)\cdot5!=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$$

$$=10\cdot6\cdot120$$

$$=7200 \text{ farklı şekilde sıralanabilir.}$$

---

**28. Örnek**

Anne, baba ve 4 çocuktan oluşan bir aileden 3 kişi bir davete katılacaktır.

**Anne ve babadan en az bir kişi bu davete zorunlu olarak katılacağına göre davete 3 kişinin kaç farklı şekilde katılabileceğini bulalım.**

**Çözüm**

İki farklı durum vardır:

**I. Durum:** Anne veya babadan biri, çocuklardan ikisi katılabilir. Bu durum,

$$C(2,1)\cdot C(4,2)=2\cdot\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=12 \text{ farklı şekilde gerçekleşebilir.}$$

**II. Durum:** Anne ve babanın her ikisi ve çocuklardan biri katılabilir. Bu durum,

$$C(2,2)\cdot C(4,1)=1\cdot4=4 \text{ farklı şekilde gerçekleşebilir.}$$

O hâlde davete $12 + 4 = 16$ farklı şekilde katılabilirler.

I. Durum II. Durum

---

## 29. Örnek

**Herhangi üç tanesi doğrusal olmayan 6 noktadan kaç doğru geçeceğini bulalım.**

### Çözüm

Bu noktalardan herhangi ikisi A, B ise {A, B} ile {B, A} seçimleri aynı doğruyu gösterir. Bu nedenle, 6 noktadan seçilecek olan herhangi iki noktanın sırası önemli değildir. Bu durumda oluşacak doğru sayısını, kombinasyonla bulabiliriz. O hâlde 6 noktadan,

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$ doğru geçer.

## 30. Örnek

**Herhangi üçü doğrusal olmayan 8 noktayla;**

**a.** Kaç üçgen çizilebileceğini bulalım.

**b.** Belli bir nokta bütün üçgenlerin ortak köşesi olmak üzere kaç üçgen çizilebileceğini bulalım.

**c.** Belli iki noktanın oluşturduğu doğru parçası, bütün üçgenlerin ortak kenarı olmak üzere kaç üçgen çizilebileceğini bulalım.

### Çözüm

**a.** Doğrusal olmayan herhangi üç nokta bir üçgen belirteceğinden 8 nokta arasından kaç farklı şekilde 3 nokta seçebiliyorsak o kadar üçgen oluşturabiliriz. O hâlde 8 nokta ile,

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$ üçgen oluşturulabilir.

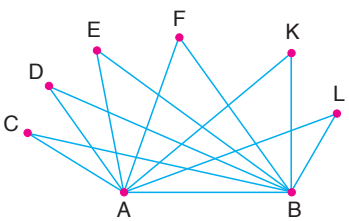
**b.** Belli bir nokta, bütün üçgenlerin ortak köşesi olacağına göre bu nokta seçime dâhil edilmez. Geriye kalan 7 noktadan ikişerli seçim yapılarak,

$$\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$$ tane doğru parçası çizilebilir.

Bu doğru parçalarının uç noktaları, belirlediğimiz ortak nokta ile birleştirilirse birer köşeleri ortak olan 21 tane üçgen çizilmiş olur.

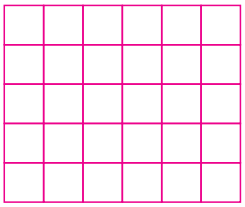
**c.** Belli iki noktanın oluşturduğu doğru parçası, bütün üçgenlerde bulunacağına göre bu iki nokta seçime dâhil edilmez. Seçim, yanda verilen şekildeki gibi diğer 6 noktadan birer tane seçilerek yapılır. Bu durumda üçgen sayısı,

$$\binom{6}{1} = 6$$ olur.



*(Belli iki nokta A ve B'dir.)*

### 1.1.2 Kritik Düşünme



Yandaki şekil, alanı $1\ br^2$ olan 30 kareden oluşturuğuna göre bu şekilde kaç kare vardır?

Yukarıdaki problem kombinasyon kullanılarak nasıl çözülebilir?

### İnceleyelim

**n elemanlı bir kümenin tüm alt kümelerinin sayısının $2^n$ olduğunu gösterelim:**

$\{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ n elemanlı bir küme olsun. Bu kümenin bir alt kümesini oluşturmak için her $x_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ elemanının kümede yer alıp almayacağına karar vermek gerekir. Bu şekilde bir alt küme aşağıdaki gibi n adımda oluşturulabilir:

**1. Adım:** $x_1$ in alt kümede olup olmayacağına karar verilmesi

**2. Adım:** $x_2$ nin alt kümede olup olmayacağına karar verilmesi

⋮

**n. Adım:** $x_n$ nin alt kümede olup olmayacağına karar verilmesi

Her adım için 2 seçenek bulunduğundan bir alt kümenin oluşturulması, $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2}_{\text{n tane}} = 2^n$ farklı şekilde sonuçlanabilir.

O hâlde n elemanlı bir kümenin tüm alt kümelerinin sayısı $2^n$ dir.

*$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin tüm alt kümelerinin sayısı $2^n$ ise,*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n \text{ dir.}$$

### 31. Örnek

**7 elemanlı bir kümenin en çok 5 elemanlı alt kümelerinin sayısını bulalım.**

**Çözüm**

En çok beş elemanlı alt kümelerinin sayısı demek; 0, 1, 2, 3, 4 ve 5 elemanlı alt küme sayılarının toplamı demektir.

O hâlde istenen $x=\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}$'dir.

$$\underbrace{\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\ldots+\binom{7}{5}}_{x}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}=2^7 \Rightarrow x+7+1=128$$

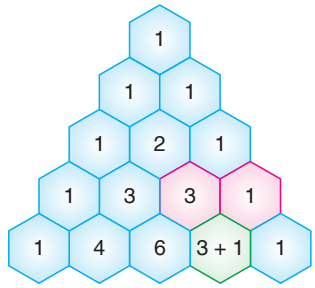
$$\Rightarrow x+8=128$$

$$\Rightarrow x=120 \text{ bulunur.}$$

## Pascal Üçgeni

### İnceleyelim

Pascal üçgeni, birçok sayı dizisini yapısında bulunduran, görünümü üçgene benzeyen bir sayı örüntüsüdür.




**Aşağıda Pascal üçgeninin bazı özellikleri incelenmiştir.**

1. Pascal üçgeninde her satırın başında ve sonunda 1 sayısı yer alır.
2. Bir satırda baştan ve sondan eşit uzaklıktaki sayılar aynıdır.
3. Bir alt satırda yer alan sayı, bir üst satırdaki yan yana iki sayının toplamıdır.
4. Pascal üçgeninin satırları n = 0'dan başlayarak numaralandırılırsa soldan sağa doğru n. satırdaki sayılar sırasıyla $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$'dir.

$$1 \rightarrow \binom{0}{0}$$

$$1 \quad 1 \rightarrow \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$1 \quad 2 \quad 1 \rightarrow \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \rightarrow \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \rightarrow \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

5. 3 ve 4. özelliklerden aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$$

Bu eşitliğe Pascal özdeşliği denir.

**Tarih Kutusu**

**Blaise Pascal** **Ömer Hayyam**

**(1623–1662)**

**(1048–1131)**

*(Temsilî resimdir.)*

Pascal üçgeni, Fransız matematikçi Blaise Pascal'ın (Bileyz Paskal) soyadı ile anılsa da Pascal'dan çok önceleri Hint, Çin, İslam medeniyetlerindeki aralarında Ömer Hayyam'ın da olduğu matematikçi ve düşünürler tarafından çalışılmıştır. Ömer Hayyam'ın Pascal üçgenini oluşturan ilk kişi olduğu düşünülmektedir. Şüphesiz Blaise Pascal, Pascal üçgenini kendi buluşuymuş gibi göstermiş, demek hata olur. O zamanlarda iletişim bugünkü kadar gelişmiş değildi. Dünya üzerinde farklı coğrafyalarda farklı medeniyet seviyeleri mevcuttu. Blaise Pascal da, Pascal üçgenini keşfettiğinde yüksek olasılıkla bunun çok daha önce Ömer Hayyam tarafından keşfedildiğinden habersizdi.

*Genel ağdan alınmıştır.*

**32. Örnek**

$\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{6}{3}+\binom{7}{4}$ **toplamını Pascal özdeşliğini kullanarak bulalım.**

**Çözüm**

$$\underbrace{\binom{5}{1}+\binom{5}{2}}_{\binom{5+1}{2}}+\binom{6}{3}+\binom{7}{4}=\underbrace{\binom{6}{2}+\binom{6}{3}}_{\binom{6+1}{3}}+\binom{7}{4}$$

$$=\underbrace{\binom{7}{3}+\binom{7}{4}}_{\binom{7+1}{4}}=\binom{8}{4} \text{ olur.}$$

$$\binom{8}{4}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=70 \text{ bulunur.}$$

**Araştırma**

Pascal üçgeninin yapısında bulunan farklı sayı dizilerini araştırınız. Bulduğunuz sayı dizilerini Pascal üçgeni üzerinde arkadaşlarınıza gösteriniz.

## 1.1.5 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

**a.** $\binom{5}{0}$ **b.** $\binom{7}{7}$ **c.** $\binom{12}{1}$ **ç.** $\binom{11}{2}$ **d.** $\binom{9}{6}$

**2.** Aşağıdaki eşitliklere göre n değerlerini bulunuz.

**a.** $C(2n, 2)=5\cdot C(n, 1)$ **b.** $P(n, 3)=4\cdot C(n, 4)$

**3.** Bir yarışmanın yarı finalinde 16 yarışmacıdan 12'si elenecektir. Buna göre;

**a.** Finalde yarışacak finalistler kaç farklı şekilde seçilebilir?

**b.** Yarışmacılardan ikisinin finali garantilediği belli olduktan sonra finalde yarışacak finalistler kaç farklı şekilde seçilebilir?

**4.** $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin üç elemanlı alt kümelerinden kaç tanesinde;

**a.** 1 elemanı bulunur?

**b.** 1 elemanı bulunmaz?

**c.** 3 ve 4 elemanları bulunur?

**ç.** 3 veya 4 elemanları bulunur?

**5.** 4 doktor ve 6 hemşirenin bulunduğu bir gruptan 3 kişilik bir ekip oluşturulacaktır.

**a.** Ekipte 2 hemşire bulunması gerektiğine göre ekip kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

**b.** Ekipte en çok 2 hemşire bulunması istenirse ekip kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

**6.** $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesinin elemanlarından seçilen 3 tek ve 2 çift rakam ile 5 basamaklı rakamları farklı kaç sayı yazılabilir?

**7.** Bir öğrencinin seçebileceği 9 dersten 4'ü aynı gün, aynı saatte okutulmaktadır.

5 ders seçmek isteyen bu öğrencinin kaç farklı seçeneği vardır?

**8.** Bir iş yerinde iki farklı proje ekibi kurulacaktır. I. proje ekibi en fazla 5, II. proje ekibi en fazla 4, iki proje ekibi de en az 2 kişilik olabilir. Buna göre;

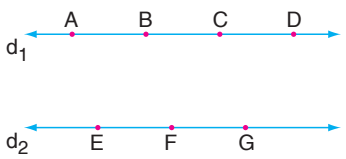
**a.** 9 personel ile ekipler kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

**b.** 7 personel ile ekipler kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

**c.** 7 personelden belli ikisi aynı proje ekibinde olmamak üzere ekipler kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

**9.** Aynı düzlemde bulunan 9 farklı doğru en fazla kaç noktada kesişir?

**10.** $d_1 \,//\, d_2$ olmak üzere köşeleri yanda verilen şekildeki 7 noktadan herhangi üçü olan kaç üçgen çizilebilir?




**11.** $\binom{8}{2}+\binom{8}{3}+\binom{9}{4}+\binom{10}{5}$ toplamını Pascal özdeşliğini kullanarak bulunuz.

**12.** 8 elemanlı bir kümenin;

**a.** En az 2 elemanlı kaç alt kümesi vardır?

**b.** En çok 5 elemanlı kaç alt kümesi vardır?

## Binom Açılımı

Günlük Hayat Bağlantısı

Dört çocuklu bir ailenin, iki kız ve iki erkek çocuğunun doğum sırası altı farklı şekilde olabilir. Bunlar aşağıdaki gibi gösterilebilir:

| | | |
|---|---|---|
| EEKK | EKEK | EKKE |
| KEEK | KEKE | KKEE |

"n çocuklu bir ailenin x tane kız ve y tane erkek çocuğunun doğum sırası kaç farklı şekilde olabilir $(n = x + y)$?" sorusunun cevabını Pascal üçgenini kullanarak verebiliriz.

### 33. Örnek

**Aşağıda $n = 1, 2, 3, 4$ için $(a + b)^n$ ifadesinin açılımları bulunmuştur. İnceleyelim.**

**Çözüm**

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ olduğunu biliyoruz.

*$a^2 + 2ab + b^2$ ifadesi $(a + b)^2$ nin binom açılımıdır.*

$(a + b)^3 = (a + b)\cdot(a + b)^2$

$= (a + b)\cdot(a^2 + 2ab + b^2)$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ tür. Benzer şekilde,

*$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ifadesi $(a + b)^3$ ün binom açılımıdır.*

$(a + b)^4 = (a + b)\cdot(a + b)^3$

$= (a + b)\cdot(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$ işlemiyle bulunabilir.

### 34. Örnek

**Aşağıda E + K iki terimlisinin 0'dan 4'e kadar kuvveti alınmıştır. İnceleyelim:**

**Binom Açılımı**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $n = 0$ | $(E + K)^0$ | $\longrightarrow$ | $1E^0K^0$ |
| $n = 1$ | $(E + K)^1$ | $\longrightarrow$ | $1E^1K^0 + 1E^0K^1$ |
| $n = 2$ | $(E + K)^2$ | $\longrightarrow$ | $1E^2K^0 + 2E^1K^1 + 1E^0K^2$ |
| $n = 3$ | $(E + K)^3$ | $\longrightarrow$ | $1E^3K^0 + 3E^2K^1 + 3E^1K^2 + 1E^0K^3$ |
| $n = 4$ | $(E + K)^4$ | $\longrightarrow$ | $1E^4K^0 + 4E^3K^1 + 6E^2K^2 + 4E^1K^3 + 1E^0K^4$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | |
| | 1 | | 1 | |
| 1 | | 2 | | 1 |
| | 1 | | 3 | | 3 | | 1 |
| 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 |

## Binom Açılımı

$1E^0K^0$

$1E^1K^0 + 1E^0K^1$

$1E^2K^0 + 2E^1K^1 + 1E^0K^2$

$1E^3K^0 + 3E^2K^1 + 3E^1K^2 + 1E^0K^3$

$1E^4K^0 + 4E^3K^1 + 6E^2K^2 + 4E^1K^3 + 1E^0K^4$

Her bir açılımda;

- n + 1 tane terim vardır.
- Terimlerdeki derecelerin toplamı n'dir.
- E'nin üstleri her terimde birer azalırken K'nin üstleri birer artmıştır.
- $(E + K)^4$ ün açılımındaki $E^2K^2$ teriminin katsayısı olan 6 sayısı; ikisi kız, ikisi erkek olan dört çocuklu bir ailenin çocuklarının doğum sıralarının sayısını vermektedir. Benzer şekilde $E^3K^1$ teriminin katsayısı olan 4 sayısı, üçü erkek ve biri kız çocuk olacak şekilde olası kız ve erkek çocuk doğum sıralarının sayısını vermektedir.

Siz de yukarıdaki açılımları inceleyerek üç çocuklu bir ailede, 2 kız ve 1 erkek çocuk için olası kaç doğum sırası olduğunu söyleyiniz.

***Binom Teoremi:*** *$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,*

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{r}x^{n-r}y^r + \ldots + \binom{n}{n}y^n \text{ dir.}$$

*Binom teoremine göre $(x + y)^n$ ifadesinin açılımında;*

- *n + 1 tane terim vardır.*
- *$(x + y)^n$ nin kuvveti olan n, ilk terim olan $x^n$ nin ve son terim olan $y^n$ nin kuvvetleri ile aynıdır.*
- *Açılımı oluşturan ardışık terimlerde x'in kuvveti birer azalırken y'nin kuvveti birer artar.*
- *Açılımı oluşturan terimlerin çarpanlarının kuvvetleri toplamı n'dir.*
- *Baştan ve sondan eşit uzaklıktaki terimlerin katsayıları eşittir.*
- *y'nin yerine $-y$ yazılırsa $(x - y)^n$ ifadesinin açılımı elde edilir.*
- *Pascal üçgeninin $(n + 1)$. satırındaki sayılar $(x + y)^n$ açılımının katsayılarını verir.*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & \dashrightarrow & (x\mp y)^0 & \dashleftarrow & \binom{0}{0} & & \\
 & & & 1 & 1 & \dashrightarrow & (x\mp y)^1 & \dashleftarrow & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & \\
 & & 1 & 2 & 1 & \dashrightarrow & (x\mp y)^2 & \dashleftarrow & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & \dashrightarrow & (x\mp y)^3 & \dashleftarrow & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & \\
1 & n & \cdots & n & 1 & \dashrightarrow & (x\mp y)^n & \dashleftarrow & \binom{n}{0} & \binom{n}{1} \quad \cdots \quad \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n}
\end{array}$$

### 35. Örnek

**$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ binom açılımını kullanarak aşağıdaki ifadelerin açılımlarını bulalım.**

**a.** $(2x + 3)^3$ **b.** $(x - 4)^3$

**Çözüm**

**a.** $(a+b)^3$ ün açılımında $a=2x$ ve $b=3$ yazalım.

$(2x+3)^3 = (2x)^3 + 3\cdot(2x)^2\cdot 3 + 3\cdot(2x)\cdot 3^2 + 3^3$

$= 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

**b.** $(a+b)^3$ ün açılımında $a=x$ ve $b=-4$ yazalım.

$(x+(-4))^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot(-4) + 3\cdot x\cdot(-4)^2 + (-4)^3$

$(x-4)^3 = x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

---

## 36. Örnek

**a. Pascal üçgeninin 6. satırını bulalım.**

**b.** $\left(\frac{2}{x} - x^2\right)^5$ **ifadesinin açılımını bulalım.**

**Çözüm**

**a.** Yanda görüldüğü gibi Pascal üçgeninin 6. satırı,

1 5 10 10 5 1'dir.

| Satır | Pascal Üçgeni |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 1 1 |
| 3 | 1 2 1 |
| 4 | 1 3 3 1 |
| 5 | 1 4 6 4 1 |
| 6 | 1 5 10 10 5 1 |

**b.** Pascal üçgeninin 6. satırına göre $(a+b)^5$ ifadesinin açılımı,

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ olur.

Bu açılımda $a=\frac{2}{x}$ ve $b=-x^2$ yazılırsa,

$$\left(\frac{2}{x}+(-x^2)\right)^5 = \left(\frac{2}{x}\right)^5 + 5\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^4\cdot(-x^2) + 10\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^3\cdot(-x^2)^2 + 10\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^2\cdot(-x^2)^3$$

$$+ 5\cdot\left(\frac{2}{x}\right)\cdot(-x^2)^4 + (-x^2)^5$$

$$\left(\frac{2}{x}-x^2\right)^5 = \frac{32}{x^5} - \frac{80}{x^2} + 80x - 40x^4 + 10x^7 - x^{10} \text{ olur.}$$

---

## 37. Örnek

**$\left(3x+\frac{1}{x}\right)^{12}$ ifadesinin $x$'in azalan kuvvetlerine göre açılımındaki ilk üç ve son iki terimi yazalım.**

**Çözüm**

Binom teoremine göre,

$$\left(3x+\frac{1}{x}\right)^{12} = (3x)^{12} + \binom{12}{1}\cdot(3x)^{11}\cdot\left(\frac{1}{x}\right) + \binom{12}{2}\cdot(3x)^{10}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \ldots$$

$$+ \binom{12}{11}\cdot(3x)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{11} + \left(\frac{1}{x}\right)^{12} \text{ olur.}$$

---

*$(x+y)^n$ ifadesinin $x$'in azalan kuvvetlerine göre açılımında* $T_{r+1} = \binom{n}{r}\cdot x^{n-r}\cdot y^r$ *ifadesine genel terim denir. Genel terim baştan $(r+1)$. terimdir.*

**38. Örnek**

$\left(4x-\frac{3}{x^2}\right)^{13}$ **ifadesinin x'in azalan kuvvetlerine göre açılımındaki baştan 8. terimi bulalım.**

**Çözüm**

$(a+b)^n$ ifadesinin baştan $(r+1)$. terimi $T_{r+1}=\binom{n}{r}\cdot a^{n-r}\cdot b^r$ olduğundan $n=13$, $a=4x$, $b=-\frac{3}{x^2}$ ve $r=7$ yazmalıyız.

$$T_8=\binom{13}{7}\cdot(4x)^{13-7}\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right)^7=\binom{13}{7}\cdot 4^6\cdot(-3)^7\cdot x^6\cdot\frac{1}{x^{14}}$$

$$=-\binom{13}{7}\cdot 4^6\cdot 3^7\cdot\frac{1}{x^8}$$ bulunur.

---

**39. Örnek**

$\left(\frac{1}{x}-x^3\right)^{11}$ **ifadesinin;**

**a. Bir terimi $Ax^5$ ise A değerini bulalım.** **b. Sabit terimini bulalım.**

**Çözüm**

$\left(\frac{1}{x}-x^3\right)^{11}$ ifadesinin açılımdaki $(r+1)$'inci terim,

$$\binom{11}{r}\left(\frac{1}{x}\right)^{11-r}\cdot(-x^3)^r=\binom{11}{r}(-1)^r\cdot(x^{-1})^{11-r}\cdot(x^{3r})$$

$$=\binom{11}{r}(-1)^r\cdot(x^{-11+r})\cdot(x^{3r})$$

$$=\binom{11}{r}(-1)^r\,(x^{4r-11})\text{'dir.}$$

**a.** $x^5$ li terimin katsayısı sorulduğuna göre $x^{4r-11}=x^5$ olmalıdır.

Bu durumda $4r-11=5 \Rightarrow 4r=16$

$\Rightarrow r=4$ bulunur. O hâlde $x^5$ li terim,

$$\binom{11}{4}(-1)^4\cdot x^5=\frac{11!}{7!\cdot 4!}\cdot x^5$$

$$=330x^5 \text{ tir.}$$

$Ax^5=330x^5 \Rightarrow A=330$ bulunur.

**b.** Sabit terim sorulduğu için $x^{4r-11}=x^0$ olmalıdır.

Bu durumda $4r-11=0 \Rightarrow 4r=11$

$\Rightarrow r=\frac{11}{4}$ bulunur.

$\frac{11}{4}\notin\mathbb{N}$ olduğundan $\left(\frac{1}{x}-x^3\right)^{11}$ ifadesinin açılımında sabit terim yoktur.

---

**40. Örnek**

**$(x+2).(3x-1)^6$ ifadesinin açılımındaki $x^5$ li terimin katsayısını bulalım.**

**Çözüm**

$$(x+2)\cdot(3x-1)^6=(x+2)\cdot\left[(3x)^6+\binom{6}{1}\cdot(3x)^5\cdot(-1)+\binom{6}{2}\cdot(3x)^4\cdot(-1)^2+\ldots\right]$$

$$=(x+2)\cdot\left[3^6x^6-\binom{6}{1}\cdot3^5\cdot x^5+\binom{6}{2}\cdot3^4\cdot x^4+\ldots\right]$$

(I) (II)

Bu eşitliğe göre $x^5$ içeren terimler,

$\binom{6}{2}3^4x^5$ (**I**'den) ve $-2\binom{6}{1}3^5x^5$ (**II**'den)'dir.

O hâlde $x^5$ li terimin katsayısı,

$\binom{6}{2}3^4-2\binom{6}{1}3^5=-1701$ bulunur.

## 1.1.6 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdaki ifadelerin açılımlarını bulunuz.

**a.** $(3x+1)^2$ **b.** $(2x^2-5y)^3$ **c.** $\left(\frac{2}{x}-3xy^2\right)^4$

**2.** Aşağıdaki istenenleri bulunuz. Bulduğunuz sonuçları sadeleştirmeyiniz.

**a.** $(2x+3)^{13}$ ifadesinin x'in azalan kuvvetlerine göre açılımındaki baştan 6. terimi

**b.** $\left(x^2+\frac{5}{x}\right)^{10}$ ifadesinin x'in azalan kuvvetlerine göre açılımındaki baştan 4. terimi

**c.** $\left(x-\frac{2}{x}\right)^{15}$ ifadesinin x'in azalan kuvvetlerine göre açılımındaki baştan 10. terimi

**3.** $(3x-y)^{12}$ ifadesinin terimlerinden biri;

**a.** $Ax^4y^8$ ise A değerini bulunuz. **b.** $Bx^3y^9$ ise B değerini bulunuz.

**4.** $(2xy-x^2)^8$ ifadesinin açılımındaki terimlerden biri $kx^{14}y^m$ olduğuna göre $m+k$ değerini bulunuz.

**5.** $\left(x^3-\frac{2}{x^2}\right)^7$ ifadesinin açılımındaki

**a.** $x^6$ lı terimin katsayısını bulunuz. **b.** Sabit terimi bulunuz.

**6.** $(x-2).(1-x^2)^7$ ifadesinin açılımındaki $x^5$ li terimin katsayısını bulunuz.

# 1.1.2 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI

**1.** Aşağıdaki ifadeler doğruysa boş kutulara "D", yanlışsa "Y" yazınız.

**a.** ☐ $P(n, r) = C(n, r)$ eşitliği bazen doğrudur.

**b.** ☐ Kombinasyonda sıra önemliyken permütasyonda sıra önemli değildir.

**c.** ☐ Herhangi üçü doğrusal olmayan 8 noktadan $P(8, 2) = 56$ doğru geçer.

**ç.** ☐ Herhangi üçü doğrusal olmayan 10 nokta ile $C(10, 3) = 120$ üçgen çizilebilir.

**2.** Aşağıda sol sütunda verilenlerin kaç farklı şekilde yapılabileceğini bulmak için permütasyon veya kombinasyondan hangisinin kullanılması gerektiğini belirleyip cevapları sağdaki sütundan bularak eşleştiriniz.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 farklı malzemeden 3'ünü seçerek pizza sipariş etmek | I. | a. | 5040 |
| Bir mağazada ödeme yapmak için 4 kişinin sıraya girmesi | II. | b. | 5985 |
| TÜRKİYE sözcüğündeki harflerin tümünü kullanarak bir harf dizilimi oluşturmak | III. | c. | 84 |
| Bir iş yerinde çalışan 21 kişi arasından 4'ünü eğitim için yurt dışına göndermek | IV. | ç. | 24 |
| | | d. | 18 |
| | | e. | 12 |

**3.** Sonucu, $P(7, 3)$ ve $C(7, 3)$ olan iki problem yazınız.

**4.** Aşağıdaki eşitliklerin her birinde n'nin değerini bulunuz.

**a.** $C(n, 2) = 28$ **b.** $\binom{n}{n-1} = 6$

**c.** $\binom{n}{3} + \binom{n}{2} = \frac{5n}{2}$ **ç.** $C(n, 2) + P(n, 2) = 30$

**5.** 8 kız, 10 erkek arasından, 3'ü kız, 4'ü erkek 7 kişilik kaç değişik grup oluşturulabilir?

**6.** 8 elemanlı alt küme sayısı, 5 elemanlı alt küme sayısına eşit olan kümenin 2 elemanlı kaç alt kümesi vardır?

**7.** En çok 2 elemanlı, 29 tane alt kümesi olan bir küme kaç elemanlıdır?

**8.** 12 kişilik bir sporcu grubundan 6 kişilik bir takım oluşturulacaktır.

Takıma girecek 2 kişi belli olduğuna göre kaç değişik takım oluşturulabilir?

**9.** Herhangi üçü doğrusal olmayan 9 nokta ile birer köşeleri ortak olan kaç üçgen çizilebilir?

# 1.1.2 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI

**10.** 10 kişilik bir gruptan, 3 kişilik bir temsilci grubu ve bu üç kişi içinden 1 başkan kaç farklı şekilde seçilebilir?

**11.** Bir sınavda sorulan 8 sorunun ilk 4'ünden en az 3'ünü cevaplamak koşuluyla 5 soru kaç değişik biçimde cevaplanabilir?

**12.** Bir çember üzerindeki 12 nokta ile kaç dörtgen çizilebilir?

**13.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 165 | | | | |
| | 495 | 792 | | |
| | | 1716 | | |
| | | | | |

Yukarıda Pascal üçgeninden bir kesit verilmiştir. Verilen sayıları kullanarak boşlukları tamamlayınız.

**14.** Aşağıdaki noktalı yerleri uygun şekilde doldurunuz.

**a.** $(2x + 3y)^n$ ifadesinin açılımında ..... tane terim vardır. Her terimde x ve y'nin üstleri toplamı .....

**b.** $(a + b)^n$ ifadesinin x'in azalan kuvvetlerine göre açılımındaki baştan 3. terim $28a^6b^2$ ise n = .....

**c.** Pascal üçgeninin 8. satırında ..... tane terim vardır.

**15.** Bir ayrıtının uzunluğu $(3x + 5)$ birim olan küpün hacmini veren açık bir ifade yazınız.

**16.** Aşağıda sol sütunda verilen ifadelerin eşitlerini sağ sütundan bularak eşleştiriniz *(Verilen ifadelerin açılımlarının x'in azalan kuvvetlerine göre düzenlendiğini varsayınız.).*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(x - 2y)^8$ ifadesinin açılımındaki baştan 3. terim | **I.** | **a.** | $-540xy^3$ |
| $(2x^2 - y)^6$ ifadesinin açılımındaki baştan 4. terim | **II.** | **b.** | $112x^6y^2$ |
| $\left(3y - \sqrt[3]{x}\right)^6$ ifadesinin açılımındaki baştan 4. terim | **III.** | **c.** | $-160x^6y^3$ |
| | | **d.** | $120x^2y^3$ |

**17.** $\left(r^3 - \frac{2}{r^2}\right)^{30}$ ifadesinin açılımında, terimlerin r'nin azalan kuvvetlerine göre sıralanacağını kabul ederek;

**a.** Baştan 7. terimi bulunuz.

**b.** Sabit terimi bulunuz.

**18.** $\left(\frac{1}{2} + a^3\right)^6$ ifadesinin açılımında sabit terim aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{32}$ E) $\frac{1}{64}$

KONU 1.2

# BASİT OLAYLARIN OLASILIKLARI

## Olasılık Kavramları

**Neler Öğreneceğiz?**

- Örnek uzayı
- Olayı
- Deneyi
- Çıktıyı
- Kesin olayı
- İmkânsız olayı
- Ayrık olayları
- Ayrık olmayan olayları
- Bir olayın tümleyenini

Günlük Hayat Bağlantısı

Günümüzde olasılığın birçok uygulama alanı vardır. Bu alanlardan bazıları; fizik, kimya, biyoloji ve genetik gibi pozitif bilimlerdir. Ayrıca astronomi, ekonomi, siyaset ve spor alanlarında da olasılık kavramı sıkça kullanılmaktadır. Sigorta şirketleri, şirket yöneticileri, kamuoyu yoklaması yapan araştırma şirketleri; olasılık kavramı ve uygulamalarını en çok kullanan meslek grupları arasındadır.

**Tarih Kutusu**

**Girolamo Cardano**
***(Cirolamo Kardano)***

**(1501–1576)**
*(Temsilî resimdir.)*

Girolamo Cardano tarafından 16. yy.da yazılan ancak 1663'te basılan Liber de Ludo Aleae *(Şans Oyunları Üzerine Kitap)* isimli kitap, olasılık üzerine yazılan ilk kitap olarak kabul edilir.

*Genel ağdan alınmıştır.*

### 1. Örnek

**Hilesiz bir madenî paranın bir kez havaya atılması durumuyla ilgili aşağıdaki gözlemleri inceleyelim.**

Para bir kez havaya atıldığında, sonucunun ne geleceğini bilemeyiz. Ancak üste gelen yüz sonuçta tura (T) veya yazı (Y) olmalıdır. O hâlde T ve Y elemanlarından oluşan küme {T, Y} bir madenî paranın bir kez havaya atılması durumunun olası tüm sonuçlarını gösterir.

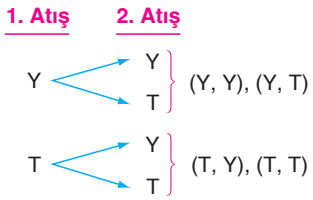
*Deney*
*Çıktı*
*Örnek Uzay*

- *Sonucu kesin olarak bilinmeyen olgulara ilişkin gözlem yapma ya da veri toplama sürecine deney, deney sonucunda ortaya çıkabilecek sonuçlara da deneyin çıktıları denir.*
- *Bir deneyde elde edilen çıktıların oluşturduğu kümeye örnek uzay denir. Örnek uzay E ile gösterilir.*

## İnceleyelim

**a. Hilesiz bir madenî paranın arka arkaya iki kez (veya hilesiz iki madenî paranın birlikte) atılması deneyinde örnek uzayı bulalım:**

Parayı 1 kez attığımızda, üste gelen yüzün yazı (Y) veya tura (T) olacağını biliyoruz. 1. atışta üste gelen yüz, yazı ise 2. atışta üste gelen yüz, yazı veya turadır. 1. atışta üste gelen yüz, tura ise 2. atışta üste gelen yüz, yazı veya turadır. Bu durumu, yandaki şema ile gösterebiliriz. O hâlde iki atış sonunda elde edilen örnek noktaların oluşturduğu, $E = \{(Y, Y), (Y, T), (T, Y), (T, T)\}$ kümesi örnek uzaydır.

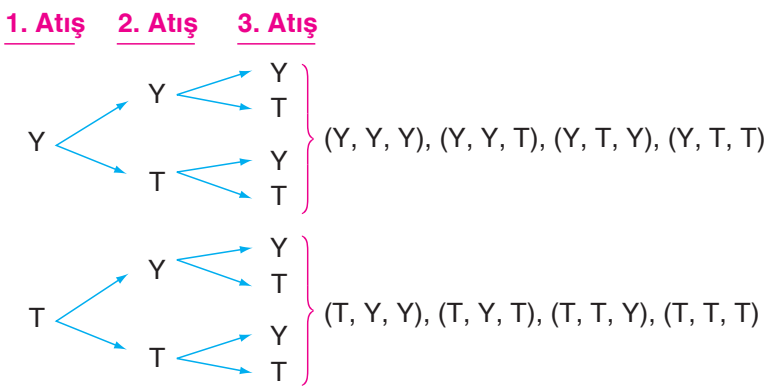



**b. Hilesiz bir zarın masaya atılması deneyinde çıktıları ve örnek uzayı bulalım:**

Zar bir kez masaya atıldığında üste gelebilecek yüzler; 1, 2, 3, 4, 5, 6 numaralı yüzlerdir. Bu sayılar, zar atma deneyinin çıktılarıdır. Bu sayıların kümesi olan $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesi örnek uzaydır.

**c. Hilesiz bir madenî paranın arka arkaya üç kez (veya hilesiz üç madenî paranın birlikte) atılması deneyinde örnek uzayı bulalım:**

Bu deney sonucunda gelebilecek çıktılar, aşağıdaki şema ile verilmiştir.




Bu deneye ait örnek uzay;

$E = \{(Y, Y, Y), (Y, Y, T), (Y, T, Y), (Y, T, T), (T, Y, Y), (T, Y, T), (T, T, Y), (T, T, T)\}$ olur.

**UYARI**

Hilesiz n tane madenî paranın havaya atılması deneyinin örnek uzayı ile hilesiz bir madenî paranın arka arkaya n defa havaya atılması deneyinin örnek uzayı birbirinin aynısıdır.

**d. Hilesiz iki zar atıldığında örnek uzayın eleman sayısını bulalım:**

İki zar birlikte atılırsa örnek uzay, tabloda görülen ikililer olur. Buna göre $E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots, (6, 6)\}$'dır. O hâlde örnek uzayın eleman sayısı 36'dır.

***Tablo:*** Hilesiz iki Zar Atılması Olayının Örnek Uzayı

| 1. Zar \ 2. Zar | ⚀ | ⚁ | ⚂ | ⚃ | ⚄ | ⚅ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ⚀ | (1, 1) | (1, 2) | (1, 3) | (1, 4) | (1, 5) | (1, 6) |
| ⚁ | (2, 1) | (2, 2) | (2, 3) | (2, 4) | (2, 5) | (2, 6) |
| ⚂ | (3, 1) | (3, 2) | (3, 3) | (3, 4) | (3, 5) | (3, 6) |
| ⚃ | (4, 1) | (4, 2) | (4, 3) | (4, 4) | (4, 5) | (4, 6) |
| ⚄ | (5, 1) | (5, 2) | (5, 3) | (5, 4) | (5, 5) | (5, 6) |
| ⚅ | (6, 1) | (6, 2) | (6, 3) | (6, 4) | (6, 5) | (6, 6) |

*Olay*
*İmkânsız Olay*
*Kesin Olay*
*Eş Olasılı Olay*
*Eş Olasılı Olmayan Olaylar*
*Bir Olayın Tümleyeni*
*Ayrık Olay*
*Ayrık Olmayan Olaylar*

- *Örnek uzayın her bir alt kümesine olay denir.*
- *Boş kümeyle gösterilen olaya imkânsız (olanaksız) olay, E örnek uzayına ise kesin olay denir.*
- *Bir örnek uzayda tanımlanan her bir olayın gerçekleşme olasılıkları aynı ise bu tür olaylara eş olasılı olaylar adı verilir.*
- *Bir örnek uzayda tanımlanan ve gerçekleşme olasılıkları farklı olan olaylara eş olasılı olmayan olaylar denir.*
- *Bir deney sonucunda elde edilen iki olayın kesişimi boş küme ve birleşimi örnek uzay ise bu iki olaydan birine diğerinin tümleyeni denir.*
- *Bir örnek uzayın, iki ayrı olayının kesişimi boş küme ise bu iki olaya ayrık olaylar denir. Diğer bir deyişle aynı zamanda gerçekleşmesi mümkün olmayan olaylar, ayrık olaylardır.*
- *Bir örnek uzayda tanımlanan iki olayın kesişimi boş küme değilse bu iki olay ayrık olmayan olaylardır.*

**Tarih Kutusu**

**El Kindî**

**(801 – 873)**

*(Temsilî resimdir.)*

Irak'ta yaşamış ve dönemin en önde gelen filozofu olarak ünlenmiştir. Olasılık kuramının atası sayılan Girolamo Cardano (Cirolama Kordano), El Kindî'yi "Orta Çağ'ın en büyük 12 beyninden biri" olarak tanımlamıştır. Kindî felsefeden tıbba, ilahiyattan siyasete, psikolojiden diyalektiğe, astrolojiden kehanete ve optikten kimyaya kadar yirmi ayrı dalda eser vererek sayıları 277'yi bulan bir külliyat oluşturmuştur. Meşşai felsefe akımını ilk başlatan kişidir. Mekân ve hareketin izafi olduğunu, zamanın cisim ve hareketten ayrı düşünülemeyeceğini söylemiştir. Gizli yazışmalardaki şifreleri, frekans analiziyle kırma yöntemini icat etmiştir.

*Genel ağdan alınmıştır.*

## 2. Örnek

**Hilesiz bir zarın masaya atılması deneyinde üste gelen sayının;**

**a. Çift sayı olma** **b. En az 4 olma** **c. 7 olma**

**ç. { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } kümesinin elemanlarından biri olma**

**olaylarını inceleyelim.**

### Çözüm

Bir hilesiz zarın masaya atılması deneyinde örnek uzay E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} olur.

**a.** Çift sayı gelme olayı A olsun. E kümesinin elemanları arasında çift sayı olanlar 2, 4 ve 6'dır.

O hâlde A = { 2, 4, 6 } olur.

**b.** En az 4 gelme olayı B olsun. E kümesinin elemanları arasında 4 ve 4'ten büyük sayılar 4, 5 ve 6'dır.

B = {4, 5, 6 } olur.

**c.** 7 gelme olayı C olsun. E kümesinin elemanları arasında 7 olmadığından C olayının olması imkânsızdır. O hâlde C = ∅ olur.

**ç.** Örnek uzay E = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } olduğundan deneyin sonucunun {1, 2, 3, 4, 5, 6} elemanlarından birisi olması kesin olaydır.

## 3. Örnek

1'den 5'e kadar beş rakam ile numaralandırılmış özdeş toplardan bir kavanoza 1'den 1 tane, 2'den 2 tane, ... 5'ten 5 tane şeklinde konuluyor.

**Kavanozdan bir top çekilmesi deneyinde topta yazan sayıların her birinin gelme durumlarını inceleyelim.**

Torbada 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 tane top bulunduğundan örnek uzayın eleman sayısı 15'tir.

A olayı çekilen topta 1 yazıyor olma durumu olsun. $s(A)=1$'dir.
B olayı çekilen topta 2 yazıyor olma durumu olsun. $s(B)=2$'dir.
C olayı çekilen topta 3 yazıyor olma durumu olsun. $s(C)=3$'tür.
D olayı çekilen topta 4 yazıyor olma durumu olsun. $s(D)=4$'tür.
E olayı çekilen topta 5 yazıyor olma durumu olsun. $s(E)=5$'tir.

Yukarıda tanımlanan A, B, C, D ve E olaylarının eleman sayıları farklı olduğundan bu olaylar eş olasılı olmayan olaylardır.

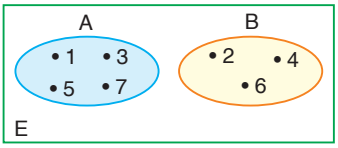
### 4. Örnek

Bir kavanozda 1'den 7'ye kadar numaralanmış aynı büyüklükte 7 bilye vardır.

**Kavanozdan bir bilye çekildiğinde tek numaralı bilye gelme olayını ve çift numaralı bilye gelme olaylarını yazalım.**

#### Çözüm

Kavanozdan bilye çekme deneyinde örnek uzay $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$'dir.
Tek numaralı bilye gelme olayı A ise $A = \{1, 3, 5, 7\}$ olur.




Benzer şekilde, çift numaralı bilye gelme olayı B ise $B = \{2, 4, 6\}$ olur.

A ve B kümelerinin ortak elemanı olmadığından $A \cap B = \varnothing$'dir. Yani A ile B olayları ayrık olaylardır.

Kavanozdan çekilecek bilye ya tek numaralı ya da çift numaralı olacaktır. Buna göre bu iki olay birbirinin tümleyenidir.

B olayı A olayının tümleyeni olduğundan $B = A'$ şeklinde gösterilir.

### 5. Örnek

**Rakamlar kümesinden rastgele seçilen bir rakam deneyinde;**

**A = {Seçilen rakamın asal olması},**
**B = {Seçilen rakamın çift olması},**
**C = {Seçilen rakamın 4'ün katı olması},**
**D = {Seçilen rakamın tek olması} olaylarını inceleyelim.**

Deneyin örnek uzayı $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ve olayları,

A = {Seçilen rakamın asal olması} = {2, 3, 5, 7}
B = {Seçilen rakamın çift olması} = {0, 2, 4, 6, 8}
C = {Seçilen rakamın 4'ün katı olması} = {0, 4, 8}
D = {Seçilen rakamın tek olması} = {1, 3, 5, 7, 9}'dir.

- $A \cap B = \{2\}$ yani $A \cap B \neq \varnothing$ olduğundan A ve B ayrık olmayan olaylardır. Kesişimleri boş küme olmadığından, A ile D ve B ile C de ayrık olmayan olaylardır.

➲ Siz de A, B, C ve D'den ayrık ve tümleyen olayları belirleyiniz.

### 1.2.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Hilesiz iki madenî paranın aynı anda havaya atılması deneyinin örnek uzayını belirleyiniz.

**2.** Hilesiz bir zarın havaya atılması deneyinde aşağıdaki olayları bulunuz.

**a.** Tek sayı olması
**b.** En çok 2 olması
**c.** 10'dan küçük olması
**ç.** İki basamaklı olması

**3.** 1'den 5'e kadar beş rakam ile numaralandırılmış özdeş toplardan bir kavanoza 1'den 5 tane, 2'den 4 tane, ..., 5'ten 1 tane şeklinde konuluyor.

Kavanozdan bir top çekilmesi deneyinde topta yazan sayıların her birinin gelme olaylarını inceleyiniz. Bu olayların eş olasılı olup olmadıklarını bulunuz.

**4.** Bir kavanozda {3, 4, 5, 6, 7, 8} rakamlarıyla numaralandırılmış aynı büyüklükte 6 bilye vardır. Kavanozdan bir bilye çekilmesi deneyinde çift numaralı bilye gelme olayını ve asal numaralı bilye gelme olayını yazıp bu olayların tümleyen olaylar olup olmadıklarını açıklayınız.

**5.** Rakamlar kümesinden bir rakamın rastgele seçilmesi deneyinde,

A = {Seçilen rakamın asal olmaması}
B = {Seçilen rakamın çift olması}
C = {Seçilen rakamın 5'in katı olması}
D = {Seçilen rakamın asal olması}

olaylarından hangilerinin ayrık, hangilerinin ayrık olmayan ve hangilerinin tümleyen olaylar olduklarını belirleyiniz.

**Tarih Kutusu**

**Pierre Simon Laplace**
***(Piyer Simon Laplas)***

**(1749–1827)**
*(Temsilî resimdir.)*

Laplace, "Olasılığın Analitik Teorisi" isimli kitabında, bilimsel uygulamaları ön plana çıkararak olasılığın matematiksel teorisini ortaya koymuştur. Laplace'ın çeşitli alanlarda çalışmaları olmuştur. Güneş'in etrafındaki gezegenlerin Güneş'e uzaklıklarının küçük istisnalar dışında değişmediğini ispatlamıştır. Yer çekimi, elektrik ve akışkanların hareketlerinin saptanmasında kullanılan Laplace denklemini oluşturmuştur. Sürekli olasılık dağılımı olan Laplace dağılımı ona aittir.

*Genel ağdan alınmıştır.*

## Olasılık Hesabı

Günlük Hayat Bağlantısı

Güvenilirlik kelimesi piyasaya çıkacak bir ürünün araştırma ve geliştirme çalışmaları sırasında genellikle tutarlılık kelimesinin yerine kullanılır. Çok fazla sayıda yapılan testler sonucunda üreticiler dayanıklı tüketim mallarına verilecek garanti süresini belirlemektedir. İşte tam da burada karşımıza olasılık çıkmaktadır. Otomobil, tüketici elektroniği ve beyaz eşyalar gibi ürünlerin kullanımında arıza çıkma olasılığını azaltmak için olasılık kuramına bağımlı olan güvenirlilik kuramı kullanılır.

- *Bir $A$ olayının olasılığı $P(A)$ ile gösterilir.*
- *Bir deneye ait sonlu örnek uzay $E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ olsun. Bu örnek uzayın her bir çıktısının olasılıkları eşit ise yani $P(e_1) = P(e_2) = ... = P(e_n)$ ise $E$ eş olasılı örnek uzaydır.*
- *$A$ olayı, $E$ eş olasılı örnek uzayında bir olay olmak üzere $A$ olayının olma olasılığı; $A$ kümesinin eleman sayısının $E$ kümesinin eleman sayısına bölünmesiyle bulunur.*

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} \text{ dir.}$$

**6. Örnek**

**Hilesiz bir madenî parayı iki kez havaya attığımızda üste gelen yüzlerinin tura olma olasılığını bulalım.**

**Çözüm**

Örnek uzay $E = \{(Y, Y), (Y, T), (T, Y), (T, T)\}$'dir. İki kez tura gelme olayı $A = \{(T, T)\}$'dır. $s(E) = 4$ ve $s(A) = 1$ olur.

Buna göre $A$ olayının olma olasılığı,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{1}{4}\text{'tür.}$$

**7. Örnek**

**Hilesiz bir çift zar atıldığında üste gelen sayıların aynı olma olasılığını bulalım.**

**Çözüm**

Bir çift zar atıldığında, örnek uzayın 36 elemanlı olduğunu biliyoruz.

Gelen sayıların aynı olması olayı,

$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$'dır.

$s(E) = 36$ ve $s(A) = 6$ olur.

Buna göre $A$ olayının olma olasılığı,

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}\text{'dır.}$$

- *İmkânsız olayın olma olasılığı 0'dır (sıfır).*
- *Kesin olayın olma olasılığı 1'dir.*
- *Bir olayın olma olasılığı daima $0 \le P(A) \le 1$ aralığında değer alır.*
- *A ve A' olayları tümleyen olaylar ise $P(A) + P(A') = 1$ olur.*

**8. Örnek**

**Hilesiz bir zar atıldığında üste gelen sayının;**

**a. 7 olma olasılığını,** **b. En az 1 olma olasılığını bulalım.**

**Çözüm**

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olduğundan $s(E) = 6$'dır.

**a.** A, zarın üst yüzüne gelen sayının 7 olma olayı olsun. Örnek uzay kümesinde 7 bulunmadığından $A = \varnothing$'dir. (A imkânsız olaydır.) O hâlde, $s(A) = 0$'dır.

Bu durumda A olayının olasılığı $P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{0}{6} = 0$ olur.

**b.** B, zarın üst yüzüne gelen sayının en az 1 olma olayı olsun. Bu durumda $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve $s(B) = 6$ olur.

$B = E$ olduğundan B kesin olaydır. O hâlde B olayının olasılığı,

$P(B) = \frac{6}{6} = 1$ olur.

**9. Örnek**

**A olayı, E örnek uzayında bir olay olsun. A olayının olma ve olmama olasılıkları arasında $2.P(A) = 3.P(A')$ eşitliği bulunduğuna göre A olayının olma olasılığını bulalım.**

**Çözüm**

$2.P(A) = 3.P(A') \Rightarrow P(A') = \frac{2 \cdot P(A)}{3}$'tür.

Tümleyen olayların olasılıklarının toplamı 1 olacağından,

$$P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow P(A) + \frac{2 \cdot P(A)}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{5P(A)}{3} = 1$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{5} \text{ bulunur.}$$

## 10. Örnek

**Hilesiz iki zar atılması deneyinde;**

**a. Üste gelen sayıların toplamının 10 olma olasılığını,**

**b. Üste gelen sayıların toplamının en az 4 olma olasılığını bulalım.**

**Çözüm**

Hilesiz iki zar atma deneyinde $s(E) = 36$'dır.

**a.** Üste gelen sayıların toplamının 10 olma olayına A diyelim. Buna göre $A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$ olup
$s(A) = 3$'tür.

Eş olasılı E örnek uzayında A olayının olma olasılığı,

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$ bulunur.

**b.** Üste gelen sayıların toplamının en az 4 olma olayına B diyelim. B olayının eleman sayısı fazla olduğundan bunun yerine B olayının tümleyenini yazalım.

$B' = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$ olup $s(B') = 3$'tür. Buna göre eş olasılı E örnek uzayında B' olayının olma olasılığı,

$$P(B') = \frac{s(B')}{s(E)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$ ve B olayının olma olasılığı,

$$P(B) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$'dir.

*Tümleyen olayların olasılıkları toplamı 1 olduğundan, $P(B) = 1 - P(B')$ dir.*

---

### Ayrık ve Ayrık Olmayan Olayların Olasılıkları

- *A ve B iki olay olmak üzere A veya B olayı $A \cup B$ şeklinde gösterilir. $A \cup B$ olayının olasılığı aşağıdaki şekilde hesaplanır.*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- *A ve B ayrık olaylar ise $A \cap B = \varnothing$ ve $P(A \cap B) = 0$ olacağından,*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)\text{'dir.}$$

---

## 11. Örnek

9 Sibirya kurdu, 8 kangal ve 7 çoban köpeğinin katıldığı bir yarışmada en güzel köpek seçilmek isteniyor. 4 Sibirya kurdu, 3 kangal ve 5 çoban köpeği kızıl, diğerleri gridir. Buna göre birinci seçilecek köpeğin;

**a. Sibirya kurdu veya çoban köpeği olma olasılığını bulalım.**

**b. Sibirya kurdu veya gri olma olma olasılığını bulalım.**

**Tablo:** Köpek Cinsleri ve Renkleri

| Cinsi / Rengi | Sibirya Kurdu | Kangal | Çoban Köpeği |
|---|---|---|---|
| Kızıl | 4 | 3 | 5 |
| Gri | 5 | 5 | 2 |

**Çözüm**

Soruda verilenler yandaki tablo ile gösterilmiştir. S seçilecek köpeğin Sibirya kurdu, Ç çoban köpeği, G gri olma olayı olsun.

$P(S)=\frac{9}{24}$ *(24 köpekten 9'u Sibirya kurdudur.)*

$P(Ç)=\frac{7}{24}$ *(24 köpekten 7'si çoban köpeğidir.)*

$P(G)=\frac{12}{24}$ *(24 köpekten 12'si gridir.)*

**UYARI**

Olasılıkta "ve" bağlacının olayların kesişimini "veya" bağlacının ise olayların birleşimini ifade ettiğine dikkat ediniz.

**a.** S ve Ç ayrık olaylar olduğundan $P(S \cap Ç) = 0$'dır. O hâlde,

$P(S \cup Ç) = P(S) + P(Ç)$

$= \frac{9}{24}+\frac{7}{24}=\frac{2}{3}$ bulunur.

**b.** S ve G ayrık olmayan olaylardır.

$P(S \cap G) = \frac{5}{24}$ *(24 köpekten 5 i Sibirya kurdu ve gridir.)*

$P(S \cup G) = P(S) + P(G) - P(S \cap G)$

$= \frac{9}{24}+\frac{12}{24}-\frac{5}{24}=\frac{2}{3}$'dir.

Günlük Hayat Bağlantısı

## 12. Örnek

Bir koşuda Tuna'nın koşuyu kazanma olasılığı, Doruk'un kazanma olasılığının 2 katıdır. Onur'un koşuyu kazanma olasılığı da Tuna'nın kazanma olasılığının üçte biridir.

**Buna göre koşuyu Tuna'nın kazanma olasılığını bulalım.**

**UYARI**

E örnek uzayını oluşturan üç ayrık olay A, B ve C olsun. Buna göre, $P(A) + P(B) + P(C) = 1$'dir.

**Çözüm**

Tuna'nın koşuyu kazanması olayı T, Doruk'un koşuyu kazanması olayı D, Onur'un koşuyu kazanması olayı O olsun.

Bu üç olay ayrık olaylar olup birleşimleri örnek uzayı oluşturacağından *(koşuyu üçünden biri kazanacağından)*,

$P(T) + P(D) + P(O) = 1$ **...(I)**'dir.

Tuna'nın koşuyu kazanma olasılığı, Doruk'un kazanma olasılığının 2 katı olduğundan $P(D) = x$ ise $P(T) = 2x$ **...(II)** olur.

Onur'un koşuyu kazanma olasılğı, Tuna'nın kazanma olasılığının üçte biri olduğundan $P(T) = 2x$ ise $P(O)=\frac{2x}{3}$ **...(III)** olur.

**I, II** ve **III**'ten,

$P(T) + P(D) + P(O) = 1 \Rightarrow 2x+x+\frac{2x}{3}=1$

$\Rightarrow x=\frac{3}{11}$ olur. O hâlde,

$P(T) = 2x = 2\cdot\frac{3}{11}=\frac{6}{11}$ bulunur.

## 13. Örnek

Bir zar, yüzlerindeki her bir sayının gelme olasılığı bu sayıyla ters orantılı olacak şekilde düzenlenerek hileli bir hâle dönüştürülüyor.

**Bu zar ile oynanan bir oyunda en az 5 atmak, oyunu kazanmak anlamına geliyorsa oyunu kazanma ve kazanamama olasılıklarını bulalım.**

### Çözüm

Orantı sabitini k alıp her bir sayının gelme olasılıklarını altlarına yazalım.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| $\frac{k}{1}$ | $\frac{k}{2}$ | $\frac{k}{3}$ | $\frac{k}{4}$ | $\frac{k}{5}$ | $\frac{k}{6}$ |

Zar atıldığında kesinlikle 1, 2, 3, 4, 5 ya da 6 sayılarından biri geleceğinden eş olasılı olmayan bu olayların olma olasılıklarının toplamı 1 olacaktır. Buna göre,

$$\frac{k}{1}+\frac{k}{2}+\frac{k}{3}+\frac{k}{4}+\frac{k}{5}+\frac{k}{6}=1 \Rightarrow \underset{(120)}{\frac{k}{1}}+\underset{(60)}{\frac{k}{2}}+\underset{(40)}{\frac{k}{3}}+\underset{(30)}{\frac{k}{4}}+\underset{(24)}{\frac{k}{5}}+\underset{(20)}{\frac{k}{6}}=1$$

$$\Rightarrow \frac{120k}{120}+\frac{60k}{120}+\frac{40k}{120}+\frac{30k}{120}+\frac{24k}{120}+\frac{20k}{120}=1$$

$$\Rightarrow \frac{294k}{120}=1$$

$$\Rightarrow k=\frac{120}{294}=\frac{20}{49} \text{ bulunur.}$$

Buna göre zarın üst yüzüne sırasıyla 5 ve 6 gelme olasılıkları,

$$\frac{k}{5}=\frac{\frac{20}{49}}{5}=\frac{4}{49} \text{ ve } \frac{k}{6}=\frac{\frac{20}{49}}{6}=\frac{10}{147} \text{ bulunur.}$$

O hâlde oyunu kazanma olasılığı,

$$P(A)=\frac{4}{49}+\frac{10}{147}=\underset{(3)}{\frac{4}{49}}+\frac{10}{147}$$

$$P(A)=\frac{22}{147} \text{ bulunur.}$$

Oyunu kazanma ve kazanamama durumları tümleyen olaylar olup olasılıklarının toplamı 1 olacağından zarı atan kişinin oyunu kazanamama olasılığı,

$$P(A)+P(A')=1 \Rightarrow \frac{22}{147}+P(A')=1$$

$$\Rightarrow P(A')=1-\frac{22}{147}$$

$$\Rightarrow P(A')=\frac{125}{147} \text{ bulunur.}$$

*Dürüstlük insanın söz ve davranışlarıyla, niyet ve inancında iyilikten ve güzellikten yana olmasıdır. Dürüst olduğumuz sürece toplumda saygı görür, kurduğumuz ikili ilişkilerde "güvenilir kişi" olarak değer görürüz. Hile yapan kişiler çevresinde bulunan birçok kişiye ve aslında kendilerine zarar verirler. Hile yapan kişilerden herkes uzak durmak ister. Çünkü hile yapan bir kişiye güvenilmez ve güvenin olmadığı herhangi bir ilişki söz konusu olamayacağından hile yapan kişilerin etrafında onları seven ve onlarla arkadaşlık yapan dürüst insanlar olmaz. Örneğin yanda bahsedildiği gibi hileli bir zar oluşturarak belki oyunu kazanma olasılığınızı artırabilirsiniz ancak bu şekilde insanların güvenini kaybedersiniz.*

## 1.2.2 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Hilesiz iki madenî parayı aynı anda havaya attığımızda üste gelen yüzlerinin farklı olma olasılığını bulunuz.

**2.** Hilesiz iki zarın havaya atılması deneyinde üste gelen sayıların birbirinden farklı olma olasılığını bulunuz.

**3.** Hilesiz bir zar atıldığında üste gelen sayının,

**a.** En çok 6 olma olasılığını bulunuz.

**b.** 0 (sıfır) olma olasılığını bulunuz.

**4.** Bir zar, yüzlerindeki her bir sayının gelme olasılığı sayıyla doğru orantılı olacak şekilde düzenlenerek hileli bir hâle dönüştürülüyor.

Bu zar ile oynanan bir oyunda en çok 2 atmak oyunu kazanmak anlamına geliyorsa oyunu kazanma ve kazanamama olasılıklarını bulunuz.

**5.** Hilesiz iki zar atılması deneyinde;

**a.** Üste gelen sayıların toplamının 9 olma olasılığını bulunuz.

**b.** Üste gelen sayıların toplamının en az 5 olma olasılığını bulunuz.

**6.** A olayı, E örnek uzayında bir olay olsun. A olayının olma ve olmama olasılıkları arasında $3.P(A') = 5.P(A)$ eşitliği bulunduğuna göre A olayının olma olasılığını bulunuz.

**7.** Bir koşuda Ahmet'in koşuyu kazanma olasılığı, Emin'in kazanma olasılığının 3 katıdır. Ziya'nın koşuyu kazanma olasılığı da Ahmet'in kazanma olasılığının beşte biridir.

Buna göre yarışı Emin'in kazanma olasılığını bulunuz.

**8.** A ve B olayları, E örnek uzayında herhangi iki olay olsun. $P(A') = \frac{2}{3}$ ve $P(B) = \frac{4}{5}$ olduğuna göre A ile B' olaylarının olma olasılıklarını bulup A ve B olaylarının ayrık olaylar olup olmadıklarını bulunuz.

**9.** 24 kişilik bir sınıfta futbol, basketbol ve futbol ile basketboldan ikisini oynayan öğrenciler bulunmaktadır. Sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin futbol oynuyor olma olasılığı $\frac{3}{4}$ olduğuna göre sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin basketbol oynayan bir öğrenci olma olasılığının en küçük değerini bulunuz.

# 1.2 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI

**1.** Aşağıdaki deneylere ait örnek uzayları ve bunlara ait olayların kümesini yazınız.

**a.** Hilesiz madenî iki paranın havaya atılması deneyinde, en az bir yazı gelmesi olayı

**b.** Hilesiz bir zarın masaya atılması deneyinde, üst yüze gelen sayının 5 olması olayı

**c.** Hilesiz bir zarın masaya atılması deneyinde, üst yüze gelen sayının en az 1 olması olayı

**ç.** Hilesiz iki zarın masaya atılması deneyinde, üst yüze gelen sayıların aynı olması olayı

**2.** Aşağıdaki ifadelerde boş bırakılan yerleri uygun bir şekilde doldurunuz.

**a.** Hilesiz bir madenî paranın havaya atılması deneyinde üste gelen yüzün yazı veya tura olması olayı ..... olay, paranın dik gelmesi olayı ise ..... olaydır.

**b.** Bir örnek uzayda tanımlanan her bir olayın gerçekleşme olasılıkları aynı ise bu tür olaylara ..... olaylar adı verilir.

**c.** Bir örnek uzayın iki ayrı olayının kesişimi boş küme ise bu iki olaya ..... denir.

**ç.** Aynı örnek uzaydaki A ve B olayları ..... olaylar olduğunda $P(A) + P(B) = 1$ olur.

**3.** Aşağıdaki ifadeler doğruysa boş kutulara "D", yanlışsa "Y" yazınız.

**a.** ☐ Hilesiz bir zarın üst üste 4 kez havaya atılması deneyinde örnek uzay 216 elemanlı olur.

**b.** ☐ A imkânsız olay ise $P(A) = 1$'dir.

**c.** ☐ $E = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi eş olasılı bir örnek uzay ise $P(\{a\}) = \frac{1}{5}$'tir.

**4.** Hilesiz üç madenî para aynı anda havaya atılıyor.

Paranın üst yüzüne en az 1 kez tura gelmesinin olasılığı kaçtır?

**5.** A, B, C gibi üç atın koştuğu bir yarışta A'nın kazanma olasılığı B'nin kazanma olasılığının 4 katı, C'nin kazanma olasılığının da 3 katıdır. Buna göre yarışı B atının kazanma olasılığı kaçtır?

**6.** Hilesiz bir zar, yüzlerindeki her bir sayının gelme olasılığı o sayının karesi ile orantılı olacak şekilde düzenlenerek hileli bir hâle dönüştürülüyor.

Bu zar ile oynanan bir oyunda en çok 3 atmak oyunu kazanmak anlamına geliyorsa oyunu kazanma ve kazanamama olasılıklarını bulunuz.

**7.** $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin alt kümelerinin her biri kartlara yazılarak bir torbaya atılıyor.

Torbadan rastgele çekilen kartta 2'nin yazıp 5'in yazmaması olasılığı kaçtır?

**8.** 3 ile tam bölünen tüm iki basamaklı doğal sayılar arasından seçilen bir sayının, 4 ile tam bölünen bir sayı olma olasılığı kaçtır?

**9.** Bütün yüzleri eşkenar üçgen olan piramite düzgün dörtyüzlü denir. Bir düzgün dört yüzlünün üç yüzünde A, bir yüzünde T harfi yazılıdır. Bu düzgün dört yüzlü bir kez havaya atıldığında yan yüzlerinde sırası ve yönüne bakılmaksızın A, T, A harflerinin görülme olasılığı kaçtır?

**10.** İçinde 3 mavi, 4 kırmızı özdeş top bulunan bir torbadan rastgele iki top çekme deneyi yapılıyor.

**a.** Çekilen toplardan 1.sinin mavi, 2.sinin kırmızı olması

**b.** Çekilen topların farklı renkte olması

Yukarıda verilen iki olayın olasılıklarını bularak karşılaştırınız. Olasılıkların arasındaki farklılıkların nedenlerini açıklayınız.

# 1. ALT ÖĞRENME ALANI TESTİ

**1.** $\dfrac{(2!+3!)!+9!}{(2!\cdot 3!)!+11!}$ **işleminin sonucu kaçtır?**

A) $\frac{1}{640}$ B) $\frac{1}{720}$ C) $\frac{1}{860}$ D) $\frac{1}{1287}$ E) $\frac{1}{1300}$

**2.** $C(n,2)+P(n,2)=\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}$ **eşitliğini sağlayan n kaçtır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

**3.** DİYALOG **sözcüğündeki harfleri kullanarak Dİ ile başlayan, anlamlı ya da anlamsız 7 harfli kaç harf dizilimi oluşturulabilir?**

A) 120 B) 122 C) 132 D) 140 E) 145

**4.** 10 kişilik seyahat grubundaki kızlardan seçilecek ikişerli grupların sayısı, erkeklerin sayısına eşittir. **Bu grupta kaç kız vardır?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

**5.** $A=\{0,1,2,3,4\}$ **kümesinin elemanlarını kullanarak 200'den büyük, 3 basamaklı, rakamları farklı kaç sayı yazılabilir?**

A) 35 B) 36 C) 37 D) 38 E) 39

**6.** 0, 1, 2, 3, 4, 5 **rakamları kullanılarak 4 basamaklı, 5'in katı olan, rakamları farklı kaç sayı yazılabilir?**

A) 106 B) 107 C) 108 D) 109 E) 110

**7.** 3 fizik, 3 kimya ve 4 matematik kitabı, aynı türden kitaplar bir arada ve matematik kitapları ortada olmak koşuluyla bir rafa **kaç değişik biçimde yerleştirilebilir?**

A) 1652 B) 1690 C) 1702 D) 1712 E) 1728

**8.** Bir grup arkadaş, iki koltuğa, 42 farklı şekilde oturabiliyor.

**Bu grup 3 koltuğa kaç farklı biçimde oturabilir?**

A) 205 B) 208 C) 210 D) 220 E) 225

**9.** 4 öğretmen ve 3 öğrenci bir sırada oturacaklardır.

**Sağ ve sol başta oturanların öğretmen olması ve öğrencilerin hep yan yana olması koşulu ile bu 7 kişi kaç farklı şekilde oturabilir?**

A) 430 B) 432 C) 434 D) 436 E) 438

**10.** **7 elemanlı bir kümenin, en çok 2 elemanlı alt küme sayısı a; en az 6 elemanlı alt küme sayısı b ise a + b kaçtır?**

A) 35 B) 36 C) 37 D) 38 E) 39

**11.** 8 erkek, 5 kız arasından bir başkan bir de sekreter seçilecektir.

**Sekreterin kız olması koşuluyla, kaç değişik seçim yapılabilir?**

A) 56 B) 58 C) 59 D) 60 E) 62

**12.** **8 çocuk ve 6 kadın arasından içinde en çok 2 çocuk bulunan 5 kişilik bir grup kaç farklı şekilde seçilebilir?**

A) 686 B) 687 C) 688 D) 689 E) 690

**13.** **10 kişi; biri 6, diğeri 4 kişilik iki gruba, kaç değişik şekilde ayrılabilir?**

A) 190 B) 195 C) 200 D) 205 E) 210

**14.** **10 kişilik bir gruptan 4 kişilik bir grup ve bu gruptan bir başkan kaç değişik biçimde seçilebilir?**

A) 760 B) 800 C) 820 D) 840 E) 900

**15.** İçinde Ayşe ve Didem'in bulunduğu 9 kişilik bir gruptan 5 kişilik gruplar oluşturulacaktır.

**Bu gruplarda Ayşe veya Didem'den biri mutlaka bulunacağına göre Ayşe ile Didem'in birlikte bulunmadığı kaç farklı grup oluşturulabilir?**

A) 70 B) 71 C) 72 D) 84 E) 91

**16.** 5 kız, 6 erkek öğrenci arasından yalnız kız ve yalnız erkeklerden oluşan 3 ve 4 kişilik gruplar oluşturulacaktır.

**Bu durumda kaç farklı grup oluşturulabilir?**

A) 250 B) 256 C) 260 D) 264 E) 270

**17.** **4 öğretmen, 6 öğrencinin bulunduğu bir gruptan içinde en az 1 öğretmen bulunan 4 kişilik bir grup kaç değişik biçimde seçilebilir?**

A) 190 B) 195 C) 200 D) 205 E) 210

**18.** $\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^6$ **ifadesi x'in azalan kuvvetlerine göre açıldığında baştan 4. terim aşağıdakilerden hangisidir?**

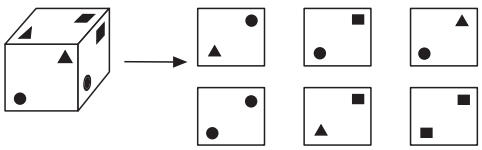
A) $9\cdot\binom{6}{3}\cdot x^3$ B) $18\cdot\binom{6}{3}\cdot x^3$ C) $27\cdot\binom{6}{3}\cdot x^3$

D) $18\cdot\binom{6}{3}\cdot\frac{1}{x^3}$ E) $27\cdot\binom{6}{3}\cdot\frac{1}{x^3}$

**19.** Bir torbada 1 siyah, 3 sarı, 2 kırmızı, 5 mavi ve 4 yeşil bilye vardır.

Torbaya geri atılmamak üzere çekilen 2. bilyenin yeşil olma olasılığı $\frac{4}{14}$ olduğuna göre ilk çekilen bilyenin rengi aşağıdakilerden hangisi **olamaz?**

A) Sarı B) Kırmızı C) Mavi
D) Yeşil E) Siyah



Yukarıdaki küpün üzerinde, yanında bulunan şekiller vardır. Bu küp bir kez yuvarlanacaktır.

**Buna göre 20 ve 21. soruları bu bilgilere göre cevaplayınız.**

**20.** Küp yuvarlandığında üst yüzeyinde **"▲" bulunuyor olma olasılığı** kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

**21.** Küp yuvarlandığında üst yüzeyinde en az bir "■" **bulunuyor olma olasılığı** kaçtır?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{6}$ E) 1

**22.** Yandaki tabloda otomobil üretim sayılarının şehirlere göre dağılımı verilmiştir.

***Tablo:*** Otomobil Üretim Sayıları

| Şehir \ Model | A | B | C |
|---|---|---|---|
| **Bursa** | 8 | 6 | 12 |
| **Adana** | 6 | 14 | 8 |
| **İzmir** | 12 | 6 | 8 |

Buna göre;

**I.** A marka otomobil alan bir kişinin aracının Adana'da

**II.** B marka otomobil alan bir kişinin aracının İzmir'de

**III.** C marka otomobil alan bir kişinin aracının Bursa'da

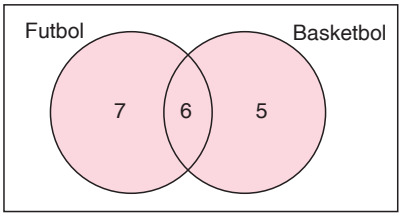
üretilmiş olma olasılıkları sırasıyla aşağıdakilerden hangisidir?

A) $\frac{4}{14}, \frac{6}{13}, \frac{3}{13}$ B) $\frac{3}{13}, \frac{4}{14}, \frac{6}{13}$

C) $\frac{4}{13}, \frac{3}{14}, \frac{6}{13}$ D) $\frac{6}{13}, \frac{4}{14}, \frac{3}{13}$

E) $\frac{3}{13}, \frac{3}{13}, \frac{6}{14}$

**23.**

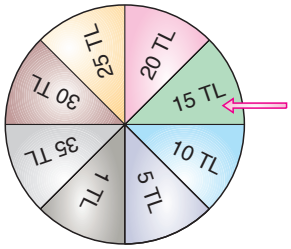



Yukarıdaki şemada bir sınıftaki tüm öğrencilerden futbol, basketbol ya da ikisi ile ilgilenenlerin sayıları gösterilmiştir.

Bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin **futbol ile ilgilenmeyen bir öğrenci olma olasılığı** kaçtır?

A) $\frac{1}{18}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{5}{9}$ D) $\frac{11}{18}$ E) $\frac{5}{18}$

**24.**




Yukarıdaki çark rastgele döndürüldüğünde okun gösterdiği dilimde yazan para miktarının **20 TL'den büyük olma olasılığı** kaçtır?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{5}{8}$

**25.** 100 sayfalık bir kitabın rastgele bir sayfası açılıp okunacaktır. Açılan sayfanın numarasının **5'in tam katı olma olasılığı** kaçtır?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{10}$ E) $\frac{1}{20}$

**26.** MATEMATİK kelimesinin her bir harf kâğıtlara yazılıp bir kutuya atılıyor.

Kutudan rastgele çekilen bir kâğıdın üzerindeki harfin **A harfi olma olasılığı** kaçtır?

A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{1}{6}$

**27.** Bir torbada 1'den 15'e kadar numaralandırılmış 15 top vardır.

Torbadan rastgele çekilen bir topun üzerindeki numaranın **8'den küçük olan bir asal sayı olma olasılığı** kaçtır?

A) $\frac{2}{15}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{4}{15}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

**28.** Aşağıdakilerden hangileri **kesinlikle** doğrudur?

**I.** Atılan bir madenî paranın yazı ya da tura gelmesi olasılığı eşittir.

**II.** Atılan bir zarın 6'dan büyük gelmesi imkansız olaydır.

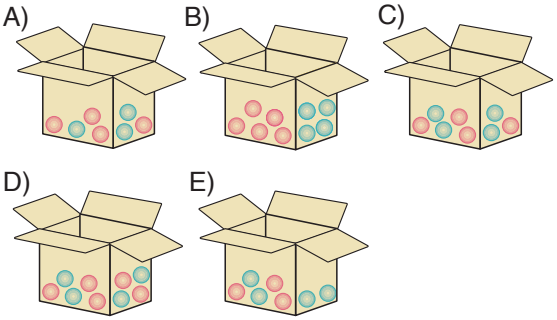
**III.** Sınava giren bir öğrencinin sınavı kazanma olasılığı 1'dir.

A) Yalnız I B) Yalnız II C) I ve II

D) II ve III E) I, II ve III

**29.** Aşağıdaki kutulardan hangisinden çekilen bir topun **pembe olma olasılığı en küçüktür?**

A) B) C)



D) E)



**30.** İçinde mavi, kırmızı ve sarı toplar bulunan bir kutudan rastgele alınan bir topun kırmızı olma olasılığı $\frac{1}{3}$ ve mavi olma olasılığı $\frac{1}{4}$ olduğuna göre **torbada en az kaç sarı top** vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

# 2. ALT ÖĞRENME ALANI

# FONKSİYONLAR

## Konular

**2.1** **Fonksiyon Kavramı ve Gösterimi**

**2.2** **İki Fonksiyonun Bileşkesi ve Bir Fonksiyonun Tersi**

*Bir fabrika yöneticisi, fabrikada üretilen ürünlerin arz – talep fonksiyonlarının grafiklerine göre gelecekteki üretim miktarlarını planlar. Bir ekonomist, borsadaki dalgalanmaları grafiklerden takip eder. Anlaşılacağı gibi birçok meslekte fonksiyonlarla işlem yapmak, fonksiyonları ve onların grafiklerini yorumlayabilmek gerekir. Bu nedenle fonksiyonlarla işlem yapabilmek, onları grafikle ifade edebilmek ve onların grafiklerini yorumlayabilmek son derece önemlidir.*

# Hazır mısınız?

**2. Alt Öğrenme Alanı**

**1.** Aşağıda ilk üç terimi verilen sayı örüntülerinin genel kuralını yazınız.

**a.** 5, 7, 9, ...

**b.** 0, 3, 8, ...

**c.** 4, 3, 2, ...

**ç.** −1, −4, −9, ...

**2.** Aşağıda verilen eşitliklerde x'i yalnız bırakarak x'in y türünden eşitini bulunuz.

**a.** $y = 2x - 5$

**b.** $y = \frac{3x+4}{3}$

**c.** $y = \frac{2x-3}{x+4}$

**ç.** $y = \frac{3x-4}{2-x}$

**3.** Aşağıda verilen ifadelerin eşitlerini bulunuz.

**a.** $(x + 2)(x - 3)$

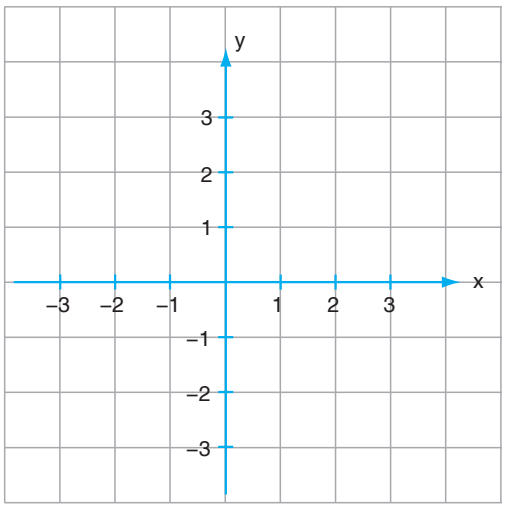
**b.** $(x^2 - 4)(x + 1)$

**c.** $(x - 2)^2 + 1$

**4. a.** A = {0, 1} ve B = {0, 2} ise,
A x B kümesini yazınız.

**b.** A x B = {(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)}
olduğuna göre A ve B kümelerini yazınız.

**5.**




Aşağıdaki noktaları yukarıdaki analitik düzlemde gösteriniz.

**a.** A(−1, 3) **b.** B(−2, 0) **c.** C(2, −3)

**ç.** D(0, −3) **d.** E(−2, −1) **d.** F(3, 3)

**6.** Aşağıda verilen nokta gruplarından hangileri aynı doğru üzerinde yer alır?

***Tablo:*** Nokta Grupları

| Grup No | 1. Nokta | 2. Nokta | 3. Nokta |
|---|---|---|---|
| I | (−1, 2) | (0, 1) | (3, −2) |
| II | (0, −1) | (1, 0) | (2, 3) |
| III | (0, −2) | (1, −1) | (−1, −3) |
| IV | (−2, −5) | (0, −1) | (1/2, 0) |
| V | (3, 0) | (−1, −1) | (7, 1) |
| VI | (−1, −1) | (0, −3) | (1, −1) |

KONU 2.1

# FONKSİYON KAVRAMI VE GÖSTERİMİ

## Fonksiyon Kavramı

**Neler Öğreneceğiz?**

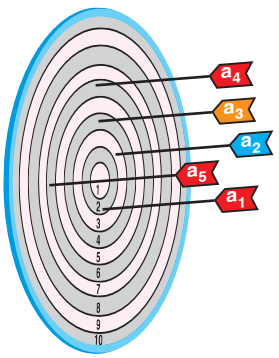
- Fonksiyon kavramını
- Bir fonksiyonun tanım, değer ve görüntü kümesini
- Fonksiyonun grafiğini
- İçine, örten ve bire bir fonksiyonu
- Düşey doğru testini
- Birim fonksiyonu
- Sabit fonksiyonu
- Doğrusal fonksiyonu
- Eşit fonksiyonları

Günlük Hayat Bağlantısı

Fonksiyonlar genellikle fiziksel bir durumun modellenmesinde kullanılır. Örneğin bir ekolog bir nehirdeki kirlilik oranını, bir sosyolog bir bölgedeki insanların ortalama ilk evlenme yaşını, bir biyolog bir bakteri kültüründeki bakteri sayısını bilmek isteyebilir. Fonksiyon, bir değişkenin başka bir değişkene bağlı olarak nasıl değiştiğini gösterir. İlk verdiğimiz örneği ele alalım: Bir nehrin kirliliği bu nehrin bulunduğu konuma göre değişebilir. "Kirlilik miktarı – konum" ilişkisi bir fonksiyon ile gösterilebilir. Verdiğimiz diğer iki örnekte değişkenler zamana bağlı olarak değişir: Günümüzde bir insanın ortalama ilk evlenme yaşı eskiye göre daha büyüktür ve bir bakteri kültürünün nüfusu zaman arttıkça artar. Bu durumları da fonksiyon ile göstermek mümkündür.

Bu ünite boyunca fonksiyon ile ilgili temel kavramları, fonksiyonların farklı gösterim biçimlerini, fonksiyon çeşitlerini ve matematiksel modellemede fonksiyonları nasıl kullanabileceğimizi öğreneceğiz.

### 1. Örnek




Okçuluk müsabakasında, ülkemizi temsil eden millî okçularımızdan biri $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$ numaralı oklarla üzerinde 1'den 10'a kadar numaralar yazılı hedef tahtasına beş atış yapıyor. Okları sırasıyla 2, 3, 4, 6 ve 6 numaralı alanlara isabet ettiriyor.

Okçumuzun atış yaptığı okları ve okların isabet edebileceği alanların numaralarını gösteren kümeler aşağıdaki gibidir *(Hedef tahtası üzerindeki her çember çevrelediği alana aittir.)*:

A = {atış yapılan oklar} = $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

B = {hedef tahtasındaki alanların numaraları} = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

**Her oku, isabet ettiği alan ile eşleyen bir kural tanımlayalım ve bu kuralı A ve B kümelerinin şemaları ile gösterelim.**

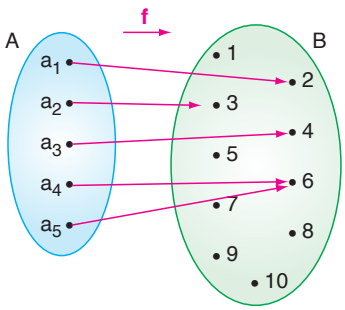
**Çözüm**

Kuralımıza göre A kümesinin elemanları ile okların isabet ettiği numaraları B kümesinden bularak eşleştirmeliyiz. Buna göre A ve B kümesinin eşleşen elemanları aşağıda gösterilmiştir.

$a_1 \to 2$ $\quad a_2 \to 3$ $\quad a_3 \to 4$

$a_4 \to 6$ $\quad a_5 \to 6$

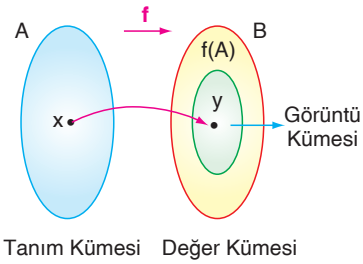
Kuralımızın adı f olsun. Buna göre f kuralı yanda şema ile gösterilmiştir. f kuralına göre;




- Bir ok ile iki farklı alanı vurmak mümkün değildir. Yani A kümesinin her bir elemanı, B kümesinin yalnız bir elemanı ile eşlenmiştir.
- Yapılan tüm atışlar hedefe isabet etmiştir. Yani A kümesinde boşta eleman kalmamıştır.

*Fonksiyon*
*Tanım Kümesi*
*Değer Kümesi*
*Görüntü Kümesi*

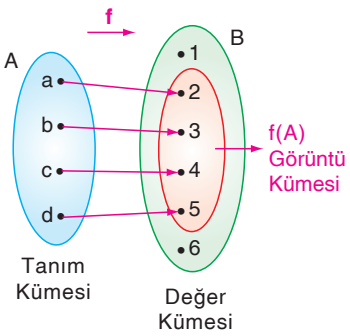
- *Fonksiyon, bir kümenin (tanım kümesi) her elemanını başka bir kümenin (değer kümesi) bir ve yalnız bir elemanına eşleyen ilişkidir.*
- *A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere f, A'dan B'ye tanımlı bir fonksiyon ise;*
  - ***i.*** *A'nın her bir elemanı, B'nin yalnız bir elemanı ile eşlenir.*
  - ***ii.*** *A'da eşlenmeyen eleman yoktur.*
- *f, A'dan B'ye bir fonksiyon ise bu, $f: A \to B$ ya da $A \xrightarrow{f} B$ biçimlerinden biri ile gösterilir. Burada;*
  - *A'ya fonksiyonun tanım kümesi,*
  - *B'ye fonksiyonun değer kümesi,*
  - *A'nın elemanlarının eşlendiği $f(A)$ kümesine de görüntü kümesi denir.*




## 2. Örnek

**"Şekil 1" ile verilen f fonksiyonunu, f fonksiyonunun tanım, görüntü ve değer kümesini liste biçiminde yazalım.**

*Şekil 1*



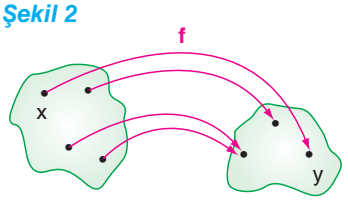

**Çözüm**

**a.** f fonksiyonunun tanım kümesi, $A = \{a, b, c, d\}$'dir.

**b.** f fonksiyonunun değer kümesi, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$'dır.

**c.** f fonksiyonunun görüntü kümesi, $f(A) = \{2, 3, 4, 5\}$'tir.

*Şekil 2*




$(x, y) \in f$ dir.

**ç.** f fonksiyonunu, "Şekil 2"de gösterildiği gibi sıralı ikililerin kümesi şeklinde yazabiliriz. Bu sıralı ikililerin birinci bileşenlerini f fonksiyonunun tanım kümesinin elemanları, ikinci bileşenlerini ise bu elemanların eşleştiği görüntü kümesinin elemanları oluşturur. O hâlde "Şekil 1"de şema ile gösterilen f fonksiyonunu liste biçiminde,

$f = \{(a, 2), (b, 3), (c, 4), (d, 5)\}$ şeklinde gösterebiliriz.

## 3. Örnek

$A = \{-2, 1, 3\}$, $B = \{-5, -3, -1\}$, $C = \{-8, 5, 10\}$ ve $D = \{-2, -1, 3, 4\}$ olmak üzere;

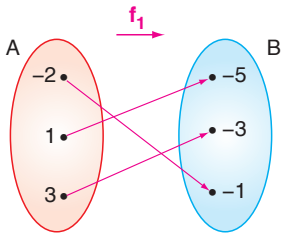
**a.** $f_1 : A \to B$, $f_1 = \{(-2, -1), (1, -5), (3, -3)\}$

**b.** $f_2 : C \to D$, $f_2 = \{(-8, 4), (5, -1), (5, 3), (10, -2)\}$

ilişkileri tanımlanmıştır.

**Bu ilişkilerin bir fonksiyon belirtip belirtmediğini açıklayalım.**

**a.** Tanım kümesindeki her bir eleman, görüntü kümesinin yalnız bir elemanı ile eşleştiğinden $f_1$ ile gösterilen ilişki bir fonksiyondur. $f_1$, yanda şema ile gösterilmiştir.

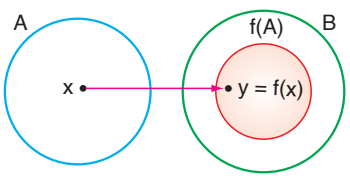



**b.** Tanım kümesindeki 5 elemanı görüntü kümesinin iki farklı elemanı olan $-1$ ve 3 ile eşleştiğinden $f_2$ ile gösterilen ilişki fonksiyon değildir. $f_2$, yanda tablo ile gösterilmiştir.

*Tablo:* $f_2$ Fonksiyonu

| x | y |
|---|---|
| –8 | 4 |
| 5 | –1 |
| 5 | 3 |
| 10 | –2 |

$(x, y) \in f_2$




- *$(x, y) \in f$ yerine aşağıdaki gösterimleri kullanabiliriz.*
  - *$f : x \to y$ ($f$ fonksiyonu, $x$ değerini alır ve $y$ değerine götürür.)*
  - *$y = f(x)$ ($f$ fonksiyonu, $x$ değeri için $y$ değerini verir.)*
- *$(x, y) \in f$ ve $y = f(x)$ ise $(x, f(x)) \in f$ olur.*

### 4. Örnek

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ve $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ kümeleri arasında $f: A \to B$, $x \to x^2$ şeklinde bir ilişki tanımlanmıştır.

**Bu ilişkinin bir fonksiyon olup olmadığını belirleyelim. Fonksiyon ise görüntü kümesini yazalım, grafiğini çizelim.**

**Çözüm**

$f(x) = x^2$ ise $f(-2) = (-2)^2 = 4$,

$f(-1) = (-1)^2 = 1$,

$f(0) = 0^2 = 0$,

$f(1) = 1^2 = 1$ ve

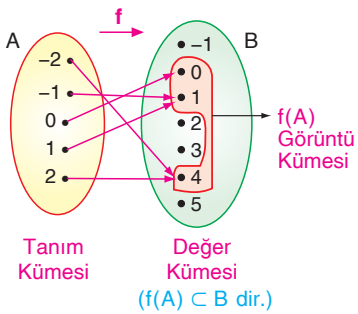
$f(2) = 2^2 = 4$ olur.

O hâlde $f = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$ olur.

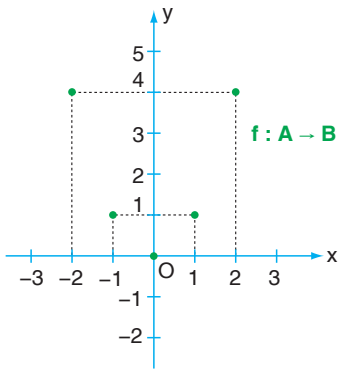
f'yi "Şekil 1"deki gibi şema ile gösterebiliriz. f, A'dan B'ye bir fonksiyondur. Çünkü A'nın her elemanı f ile B'nin yalnız bir elemanına eşlenmiş ve A'da eşlenmedik eleman kalmamıştır. f fonksiyonunun görüntü kümesi $f(A) = \{0, 1, 4\}$ tür.

f fonksiyonunu oluşturan her bir sıralı ikiliyi analitik düzlemde gösterirsek f fonksiyonunun grafiğini çizmiş oluruz (Şekil 2).

*Şekil 1*




*Şekil 2*




## 2.1.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Zarla oynanan bir oyunda bir oyuncunun art arda attığı beş atış sonucunda üste gelen sayılar sırasıyla 1, 2, 3, 4, 3'tür. Oyuncunun yaptığı beş atış sırasıyla $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ sembolleri ile gösterilsin.

Buna göre;

**a.** Oyuncunun yaptığı atışları gösteren küme A ve bir zar atıldığında üste gelebilecek sayıları gösteren küme B olsun. A ve B kümelerini liste biçiminde yazınız.

**b.** Her bir atışı o atışta üste gelen sayıya eşleyen bir f kuralı tanımlayınız ve bu kuralı A ve B kümelerinin şemalarını kullanarak gösteriniz.

**c.** f kuralının bir fonksiyon belirtip belirtmediğini açıklayınız. f bir fonksiyon ise tanım, değer ve görüntü kümesini yazınız.

**2.** $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y, z, t, k\}$ olmak üzere $A \to B$'ye tanımlanan aşağıdaki ilişkilerden hangileri fonksiyondur? Fonksiyon olanların görüntü kümelerini yazınız.

**a.** $\beta_1 = \{(a, x), (c, x), (d, k)\}$

**b.** $\beta_2 = \{(a, y), (b, x), (b, t), (c, k)\}$

**c.** $\beta_3 = \{(a, y), (b, z), (c, z), (d, k)\}$

**ç.** $\beta_4 = \{(a, k), (b, z), (c, t), (d, y)\}$

**d.** $\beta_5 = \{(a, t), (a, k), (c, z), (d, t)\}$

**e.** $\beta_6 = \{(a, x), (b, x), (c, x), (d, x)\}$

**3.** $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve $f: A \to B$ olmak üzere $f = \{(x, y) \mid y = -x + 3\}$ şeklinde tanımlanıyor.

**a.** $f$ fonksiyonunu liste biçiminde yazınız.

**b.** $f(A)$ kümesini liste biçiminde yazınız.

**c.** $f$ fonksiyonunun şemasını çiziniz.

**ç.** $f$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

### 5. Örnek

**Aşağıda istenenleri bulalım.**

**a.** $f(x) = |2x - 14| + 5$ ise $f(2)$ kaçtır?

**Çözüm**

$f(2) = |2.2 - 14| + 5$

$= |-10| + 5 = 15$ bulunur.

**b.** $g(x) = 3x^5 - 2x^2 + x - 1$ ise $g(a)$ kaçtır?

**Çözüm**

$g(a) = 3(a)^5 - 2(a)^2 + (a) - 1$

$= 3a^5 - 2a^2 + a - 1$ bulunur.

### 6. Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 2(x - 1) + 5$ şeklinde tanımlanıyor.

**a. $f(x + 2)$'yi bulalım.** **b. $f[f(2)]$'yi bulalım.**

**Çözüm**

*$f(x + 2)$'yi bulmak için $f(x) = 2(x - 1) + 5$'te $x$ gördüğümüz yere $x + 2$ yazarız.*

**a.** $f(x + 2) = 2(x + 2 - 1) + 5$

$= 2x + 7$

*$f[f(2)]$'yi bulmak için $f(x) = 2(x - 1) + 5$'te $x$ gördüğümüz yere $f(2)$ değerini yani 7'yi yazarız.*

**b.** $f(2) = 2.(2 - 1) + 5 = 7$'dir.

$f[(f(2)] = f(7)$

$= 2(7 - 1) + 5$

$= 17$'dir.

## 7. Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 3x - 4$ ve $g(x) = x + 5$ şeklinde tanımlanıyor.

**$f(4a) = g(3a)$ olduğuna göre $a$'nın kaç olduğunu bulalım.**

**Çözüm**

$f(x) = 3x - 4 \Rightarrow f(4a) = 3 \cdot 4a - 4 = 12a - 4$,

$g(x) = x + 5 \Rightarrow g(3a) = 3a + 5$ olur.

Şimdi $a$'yı bulalım:

$f(4a) = g(3a) \Rightarrow 12a - 4 = 3a + 5$

$\Rightarrow 12a - 3a = 5 + 4$

$\Rightarrow 9a = 9$

$\Rightarrow a = 1$ bulunur.

**Tarih Kutusu**

**Leonhard Euler**
***(Lionhart Oylır)***

**(1707 – 1783)**
*(Temsilî resimdir.)*

Yaşadığı dönemin önde gelen matematikçilerinden olan Leonhard Euler, yaşamış en üretken matematikçi olarak bilinmektedir. Aynı zamanda astrolog, botanikçi, fizikçi, kimyacı ve doğu dilleri uzmanı olan Euler, çalışmalarında fonksiyon kavramını günümüzdeki tanımıyla kullanan ilk bilim adamıdır.

*A History of Mathematics*

## 8. Örnek

**Aşağıda kuralı verilen fonksiyonların tanım kümesini bulalım.**

**a.** $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x+2}$ **b.** $g(x) = \dfrac{x+2}{x^2+1}$

**Çözüm**

**a.** Fonksiyon kuralının paydasını sıfır yapan tüm değerleri bulalım.

$3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3}$'tür.

$f(x)$'in tanım kümesi $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$'tür.

**b.** $x \in \mathbb{R}$ için $x^2 > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 0$ olduğundan $x^2 + 1 \neq 0$'dır.

Bu durumda paydayı sıfır yapan bir $x \in \mathbb{R}$ yoktur.

O hâlde $g(x)$'in tanım kümesi tüm gerçek sayılar kümesidir.

**Araştırma**

Euler fonksiyonunu $(\varphi)$ araştırınız ve kuralını bulunuz. Aşağıdaki soruyu $\varphi$ fonksiyonunu kullanarak çözünüz.

"15 ile ortak böleni olmayan 15'ten küçük pozitif doğal sayıların toplamı kaçtır?"

**UYARI**

$\dfrac{a}{b}$ şeklindeki bir rasyonel ifadenin ancak $b \neq 0$ olduğunda tanımlı olacağını hatırlayınız.

**UYARI**

$\sqrt[n]{a}$ ifadesi;

- n tek ise her $a \in \mathbb{R}$ için,
- n çift ise $a \geq 0$ için tanımlıdır.

## 9. Örnek

**Aşağıda kuralı verilen fonksiyonların tanım kümesini bulalım.**

**a.** $h(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x}$ **b.** $k(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$

**Çözüm**

**a.** $2x^2 - x$ ifadesini tanımsız yapan bir $x \in \mathbb{R}$ yoktur ve tüm gerçek sayıların küpkökü tanımlıdır.

Bu nedenle $h(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x}$ fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$'dir.

**b.** Paydadaki kök içinde yer alan ifade pozitif olmalıdır.

$x - 1 \geq 0$ **...(I)**

Fonksiyon kuralının paydası sıfır olamaz.

$\sqrt{x-1} \neq 0 \Rightarrow x - 1 \neq 0$ **...(II)**

**I** ve **II**'den,

$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ olur.

O hâlde $k(x)$'in tanım kümesi $(1, \infty)$'dır.

PROBLEM ÇÖZME

## 10. Örnek

Mustafa Bey, dikdörtgen şeklindeki arsasını çitlerle çevreleyerek bir sebze bahçesi oluşturmak istiyor. Bahçenin kenarlarını çitle oluşturmanın maliyeti metre başına 25 TL'dir. Mustafa Bey bahçeyi çevrelemek için toplam 900 TL harcayacağına göre;

**a. Bahçenin alanını bir kenarının uzunluğu cinsinden ifade eden fonksiyonu yazalım.**

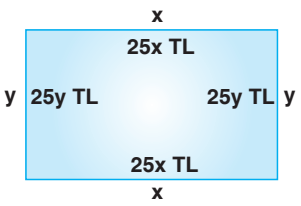
**b. Elde ettiğimiz fonksiyonun tanım kümesini bulalım.**

**Çözüm**

**a.** Uzunluğu x, genişliği y olan dikdörtgen şeklindeki bahçenin alanı,

$A = x \cdot y$ ...**(I)**'dir.

Bahçenin her bir kenarının metre başına mal oluş fiyatını yanda verilen şekildeki gibi bir modelle gösterelim. Her bir kenar uzunluğunu metre başına maliyet fiyatı ile çarparak toplam mal oluş fiyatını bulalım:




$25x + 25y + 25x + 25y = 50x + 50y$'dir.

Toplam maliyet 900 TL verildiğinden $50x + 50y = 900$ **...(II)** yazabiliriz.

x'i bağımsız değişken olarak seçelim ve y'yi x cinsinden yazmak için **II**'deki eşitliği kullanalım:

$50x + 50y = 900 \Rightarrow y = \frac{1}{50}(900 - 50x) \Rightarrow y = 18 - x$ **...(III)** olur.

y'nin **III**'teki eşitini **I**'de yerine yazalım:

$A(x) = x \cdot y = x \cdot (18 - x) = 18x - x^2$ bulunur. Bu ifade bahçenin alanını, x uzunluğu cinsinden ifade eden fonksiyondur.

**b.** Ancak $x > 0$ olması durumunda dikdörtgenler oluşur. Benzer şekilde $y > 0$ olmalıdır.

$y > 0 \Rightarrow 18 - x > 0 \Rightarrow x < 18$ bulunur.

$x > 0$ ve $x < 18$ olacağından $A(x)$'in tanım kümesi $(0, 18)$ olur.

## Parçalı Fonksiyon

*Tanım kümesinin ayrık alt aralıklarında farklı birer kuralla tanımlanan fonksiyonlara parçalı fonksiyon denir.*

*Parçalı Fonksiyon*

**11. Örnek**

$$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \text{ ise} \\ x+1, & 0 \le x < 3 \text{ ise} \\ -x^2, & x \ge 3 \text{ ise} \end{cases}$$

**olduğuna göre** $\frac{f(-2)+f(5)}{f(2)}$ **ifadesinin değerini bulalım.**

**Çözüm**

$-2 < 0$ olduğundan $f(-2) = (-2)^2 = 4$

$0 \le 2 < 3$ olduğundan $f(2) = 2 + 1 = 3$

$5 \ge 3$ olduğundan $f(5) = -5^2 = -25$'tir.

O hâlde $\frac{f(-2)+f(5)}{f(2)} = \frac{4-25}{3} = -7$ bulunur.

## 2.1.2 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** $g:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R},\ g(x)=\dfrac{x-1}{x}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1-3x$ ve $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=|x^2-x|-2$ olduğuna göre aşağıda istenenleri bulunuz.

**a.** $f(2)$ **b.** $f(-1)$ **c.** $f(-3)$ **ç.** $g(1)$ **d.** $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$

**e.** $h(-1)$ **f.** $h(4)$ **g.** $f(a)$ **ğ.** $g(x+1)$ **h.** $h(3x)$

**2.** $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x-1}{2x}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\dfrac{2-x}{3}$ ve $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=3x-4$ olduğuna göre aşağıda istenenleri bulunuz.

**a.** $2\cdot f(-1)+3\cdot g(m)=h(m)$ ise $m$ kaçtır?

**b.** $4a\cdot f(a)=6\cdot g(1)-h(a)$ ise $a$ kaçtır?

**c.** $3\cdot g(-1)-b\cdot f(1)=h(b-1)$ ise $b$ kaçtır?

**3.** Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

**a.** $f(x)=2x^3-6x-2$ **b.** $g(x)=\dfrac{1-x}{2x+3}$ **c.** $h(x)=\dfrac{x+1}{x^2-x}$

**ç.** $k(x)=\dfrac{x^5}{x^4+2}$ **d.** $l(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2-4x}}$ **e.** $m(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x-1}}$

**f.** $n(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+1}}$ **g.** $p(x)=\sqrt{|2x+1|-3}$ **ğ.** $r(x)=\sqrt{x-|x-2|}$

**4.** 30 kuyu bulunan bir petrol bölgesinde günde 6000 varil petrol üretilmektedir. Her kuyunun günlük üretimi, açılan her yeni kuyu için günde 4 varil azalmaktadır. Buna göre;

**a.** Yeni açılan kuyuların sayısı $x$ olmak üzere bu petrol bölgesindeki günlük toplam petrol üretimini $x$'in bir fonksiyonu olarak ifade ediniz.

**b.** Bu fonksiyonun tanım kümesini belirleyiniz.

**5.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x<0 \text{ ise} \\ x+1 & , \quad 0\le x<3 \text{ ise} \\ -x^2 & , \quad x\ge 3 \text{ ise} \end{cases}$

olduğuna göre $f(-1)+f(3)+f(2)$ değerini bulunuz.

## Birim (Özdeşlik) Fonksiyon

### 12. Örnek

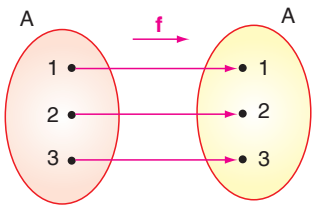
**$A = \{1, 2, 3\}$ olmak üzere $f: A \to A$, $f(x) = x$'tir. $f$ fonksiyonunu şema ile gösterelim.**

**Çözüm**

$f(x) = x$ kuralına göre;

$x = 1$ için $f(1) = 1$, $x = 2$ için $f(2) = 2$ ve $x = 3$ için $f(3) = 3$'tür.

Bu verileri aşağıdaki gibi şema ile gösterebiliriz.




$f$ fonksiyonunun tanım kümesindeki her eleman yine kendisine eşlenmiştir.

*$f: A \to A$ fonksiyonunda $f(x) = x$ ise $f$ fonksiyonuna birim fonksiyon denir. Diğer bir deyişle birim fonksiyonun tanım kümesindeki her bir elemanın görüntüsü kendisine eşittir.*

*Birim Fonksiyon*

### 13. Örnek

**$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = (m - 1)x + n - 4$'tür. $f$ fonksiyonunun birim fonksiyon olabilmesi için $m$ ve $n$ kaç olmalıdır? Bulalım.**

**Çözüm**

$f$ birim fonksiyon ise $f(x) = x = 1 \cdot x + 0$ olup $x$'in katsayısı 1, sabit terimi 0 olmalıdır.

$$f(x) = \underbrace{(m - 1)}_{1}x + \underbrace{n - 4}_{0}$$

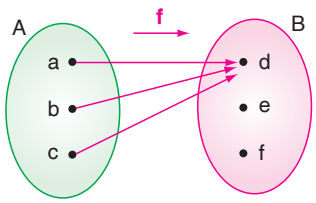
O hâlde $m - 1 = 1 \Rightarrow m = 2$ ve $n - 4 = 0 \Rightarrow n = 4$ bulunur.

## Sabit Fonksiyon

### 14. Örnek

**Aşağıda şema ile gösterilen fonksiyonları inceleyelim.**

**a.**




**b.** $C = \{3, 4, 5\}$, $D\{5\}$

$g: C \to D$

$g = \{(3, 5), (4, 5\}, (5, 5)\}$

f ve g fonksiyonlarının tanım kümelerindeki her eleman değer kümesindeki yalnız bir elemanla eşleşmiştir.

*Sabit Fonksiyon*

*Tanım kümesindeki bütün elemanları değer kümesindeki bir tek elemana eşleyen fonksiyona sabit fonksiyon denir.*

*Diğer bir deyişle, her $x \in A$ ve $c \in B$ için $f(x) = c$ oluyorsa f, A'dan B'ye sabit fonksiyondur.*

### 15. Örnek

**Kuralı $f(x) = (a - b + 3)x + 7$ olan f fonksiyonunun sabit fonksiyon olması için a – b'nin değerini bulalım.**

**Çözüm**

f sabit fonksiyon ise x'in kat sayısı sıfırdır.

$f(x) = \underbrace{(a - b + 3)}_{0}x + 7$

O hâlde $a - b + 3 = 0 \Rightarrow a - b = -3$'tür.

### 2.1.1 Kritik Düşünme

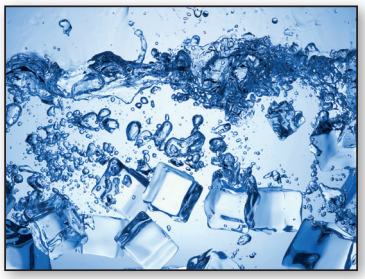
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu;

1. Birim fonksiyon ve $f(a) = 5$ ise a kaçtır?
2. Sabit fonksiyon ve $f(a) = 5$ ise a kaç olabilir?

## Doğrusal Fonksiyon

### 16. Örnek

Su katılaştığında hacmi artan sadece birkaç sıvıdan biridir. Aşağıdaki tablo aynı miktarlardaki su ve buzun mL cinsinden hacmini göstermektedir.



*Tablo:* Aynı Miktarlardaki Su ve Buzun Hacmi (mL)

| Su (mL) | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 |
|---|---|---|---|---|---|
| Buz (mL) | 12 | 24 | 36 | 48 | 60 |

**Buna göre suyun mL cinsinden hacmine (x) göre buzun mL cinsinden hacmini (y) veren y = f(x) fonksiyonunun kuralını bulalım.**

**Çözüm**

x ve y bileşenleri arasındaki sayısal ilişkiyi araştıralım:

$11 \xrightarrow{\times \frac{12}{11}} 12 \quad 22 \xrightarrow{\times \frac{12}{11}} 24 \quad 33 \xrightarrow{\times \frac{12}{11}} 36 \quad 44 \xrightarrow{\times \frac{12}{11}} 48 \quad 55 \xrightarrow{\times \frac{12}{11}} 60 \quad x \xrightarrow{\times \frac{12}{11}} y$

Yukarıda da görüldüğü gibi x ile y arasındaki ilişki, $y = \frac{12}{11}x$ şeklindedir.

Bu kuralı f fonksiyonu ile $y = f(x) = \frac{12}{11}x$ şeklinde gösterebiliriz.

*f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve m, n $\in \mathbb{R}$ olmak üzere kuralı f(x) = mx + n şeklinde olan fonksiyonlara doğrusal fonksiyon denir.*

### 17. Örnek

**f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ doğrusal bir fonksiyondur. f(0) = 3 ve f(1) = 7 ise f fonksiyonunun kuralını bulalım.**

**Çözüm**

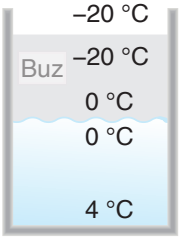
f doğrusal ise f(x) = mx + n *(m, n $\in \mathbb{R}$)*'dir.

f(0) = 3 $\Rightarrow$ m·0 + n = 3 $\Rightarrow$ n = 3'tür.

f(1) = 7 $\Rightarrow$ m·1 + n = 7 $\Rightarrow$ m + 3 = 7 $\Rightarrow$ m = 4'tür.

O hâlde f(x) = 4x + 3'tür.

**Bunları Biliyor musunuz?**




Erime esnasında suyun hacmi sıcaklığı 4 °C oluncaya kadar azalır, sonra tekrar artmaya başlar. Suyun donarken hacminin artması dolayısıyla yoğunluğunun azalması (Yoğunluk = Kütle / Hacimdir.) hayatın devamı için gerekli milyonlarca şartlardan biridir. 4 °C sıcaklığındaki su en dibe inip (Yoğunluğu az olan madde üstte kalır.) buradaki canlıların donmaktan kurtulmasını sağlar.

Su donduğunda hacmi azalsaydı; göller, akarsular ve hatta denizler alttan donar; kış yeterince soğuk geçerse buralardaki tüm suyun donma ihtimali doğardı.

***Doğrusal Fonksiyon***

## Eşit Fonksiyonlar

### 18. Örnek

$A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ olmak üzere $f: A \to B$ fonksiyonu $f(x) = x + 1$ ve $g: A \to B$ fonksiyonu $g(x) = x^3 + 1$ şeklinde tanımlanıyor.

**f ve g fonksiyonlarının görüntü kümelerini bularak iki fonksiyon arasındaki ilişkiyi bulalım.**

**Çözüm**

$f(x) = x + 1 \Rightarrow f(-1) = -1 + 1 = 0$

$\Rightarrow f(0) = 0 + 1 = 1$

$\Rightarrow f(1) = 1 + 1 = 2$'dir.

$g(x) = x^3 + 1 \Rightarrow g(-1) = (-1)^3 + 1 = 0$

$\Rightarrow g(0) = 0^3 + 1 = 1$

$\Rightarrow g(1) = 1^3 + 1 = 2$'dir.

Yukarıda görüldüğü gibi tanım kümesinin her elemanı için f ve g fonksiyonlarının görüntüleri aynıdır.

**Eşit Fonksiyonlar**

*$f: A \to B$ ve $g: A \to B$ olmak üzere f ve g fonksiyonları A'nın her elemanı için aynı değeri alıyorsa f ve g'ye eşit fonksiyonlar denir ve $f = g$ şeklinde gösterilir.*

$$f = g \text{ ise her } x \in A \text{ için } f(x) = g(x)\text{'tir.}$$

### 19. Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere f ve g fonksiyonları

$f(x) = (a - 1)x^2 + 2x + b + 3$ ve

$g(x) = cx + 5$ şeklinde tanımlanıyor.

**f = g olduğuna göre a, b ve c değerlerini bulalım.**

**Çözüm**

Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = g(x)$ ise,

$\underbrace{(a - 1)}_{0}x^2 + 2x + b + 3 = cx + 5$ olmalıdır.

O hâlde $a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$'dir.

$c = 2$'dir.

$b + 3 = 5 \Rightarrow b = 2$'dir.

## Çift Fonksiyon, Tek Fonksiyon

*Çift Fonksiyon*
*Tek Fonksiyon*

*$f:[-a, a] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere tanım kümesinin her elemanı için;*

- *$f(-x) = f(x)$ ise $f$ çift fonksiyon,*
- *$f(-x) = -f(x)$ ise $f$ tek fonksiyondur.*

### 20. Örnek

**$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - x^2 + 1$'dir. $f$ fonksiyonunun çift fonksiyon olduğunu gösterelim.**

**Çözüm**

$f(-x)$ fonksiyonun kuralını bulalım ve $f(x)$ ile karşılaştıralım.

$$f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 + 1$$
$$= x^4 - x^2 + 1 \text{ bulunur.}$$

$f(-x) = f(x)$ olduğundan $f(x)$ çift fonksiyondur.

### 21. Örnek

**$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + (a - 3)x^2 + x$'tir. $f$ fonksiyonu tek fonksiyon ise $a$ değerini bulalım.**

**Çözüm**

$f$ fonksiyonu tek fonksiyon ise $f(-x) = -f(x)$ olmalıdır.

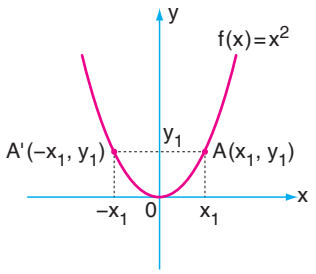
$$f(-x) = (-x)^3 + (a - 3)(-x)^2 + (-x)$$
$$= -x^3 + (a - 3)x^2 - x\text{'tir.}$$

$f(-x) = -f(x)$ ise,

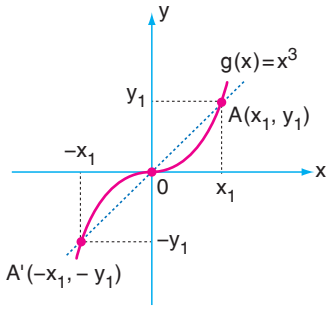
$$-x^3 + (a - 3)x^2 - x = -(x^3 + (a - 3)x^2 + x)$$
$$-x^3 + (a - 3)x^2 - x = -x^3 - (a - 3)x^2 - x$$
$$(a - 3)x^2 = -(a - 3)x^2$$
$$2(a - 3)x^2 = 0 \text{ bulunur.}$$

Bu eşitliğin her $x$ gerçek sayısı için doğru olması gerektiğinden,

$$a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3 \text{ bulunur.}$$




✳ *f(x) = x² fonksiyonu çift fonksiyon olup grafiği y eksenine göre simetriktir.*




✳ *g(x) = x³ fonksiyonu tek fonksiyon olup grafiği orijine göre simetriktir.*

**22. Örnek**

**Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f fonksiyonu $f(x) = x^2 + x + 1$ şeklinde tanımlanıyor. f(x) ile f(–x) arasındaki ilişkiyi inceleyelim.**

**Çözüm**

$f(x) = x^2 + x + 1$ fonksiyonu için $f(-x)$ fonksiyonunun kuralını bulalım.

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) + 1$$
$$= x^2 - x + 1 \text{ olur.}$$

$f(x) \neq f(-x)$ ve $f(x) \neq -f(-x)$'tir.

Bu nedenle $f(x)$ fonksiyonu ne tek ne de çift fonksiyondur.

*Çift fonksiyonların grafikleri y eksenine,*

*Tek fonksiyonların grafikleri orijine göre simetriktir.*

## 2.1.3 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** $A=\{-1, 0, 1\}$ olmak üzere $f: A \to A$ fonksiyonu $f(x) = x^5 - x^3 + x$ şeklinde tanımlanıyor. f fonksiyonunun grafiğini çiziniz. f birim fonksiyon mudur? Neden?

**2.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \frac{a}{2}x + b + 3$ şeklinde tanımlanıyor. f fonksiyonu birim fonksiyon ise a – b kaçtır?

**3.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \left(\frac{2a}{3} - 4\right)x$ şeklinde tanımlanıyor. f fonksiyonu sabit fonksiyon ise a kaçtır?

**4.** Hava kalitesini ölçmek için bir alet, sıcak hava balonuna bağlanarak balon serbest bırakılıyor. Aşağıdaki tablo bırakıldıktan t saniye sonra balonun yerden yüksekliğini göstermektedir.

***Tablo:*** Balonun Yerden Yüksekliği

| Zaman (s) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Yükseklik (m) | 3 | 7 | 11 | 15 | 19 |

Bu ilişkiyi gösteren cebirsel kuralı yazınız.

**5.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ doğrusal fonksiyon, $f(-1) = 3$ ve $f(2) = 9$ ise $f(x)$ in kuralını bulunuz.

**6.** $A = \{1, 2\}$ ve $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olmak üzere $f: A \to B$ fonksiyonu $f(x) = x^2 + 1$ ve $g: A \to B$ fonksiyonu $g(x) = 3x - 1$ şeklinde tanımlanıyor. $f(A)$ ve $g(A)$ kümelerini bulunuz. $f$ ve $g$ eşit fonksiyonlar mıdır? Neden?

**7.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = (a^2 - 1)x^2 + 3x + 2b + 1$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $g(x) = (a + 4)x + 3$ şeklinde tanımlanıyor. $f$ ve $g$ fonksiyonları eşit fonksiyonlar ise $a \cdot b$ kaçtır?

**8.** Aşağıda verilen fonksiyonlardan tek fonksiyon, çift fonksiyon ve ne tek ne de çift fonksiyon olanları belirleyiniz.

**a.** $f(x) = x^4 + 2$ **b.** $g(x) = x^3 + x$ **c.** $k(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ **ç.** $h(x) = x^2 + 3x + 4$

**9.** $f: [-a, 3] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = x^3 + (b - 2)x^2 + c - 5$ şeklinde tanımlanıyor. $f$ fonksiyonu tek fonksiyon ise $a + b + c$ değerini bulunuz.

## Bire Bir Fonksiyon

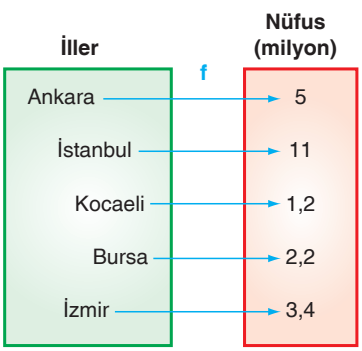
*Bire Bir Fonksiyon*

- *Tanım kümesindeki her farklı elemanın görüntüsü de farklı ise böyle fonksiyonlara bire bir fonksiyon denir.*
- *Diğer bir deyişle $f: A \to B$ olmak üzere her $x_1, x_2 \in A$ için,*
  - *$x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ ya da*
  - *$f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$*

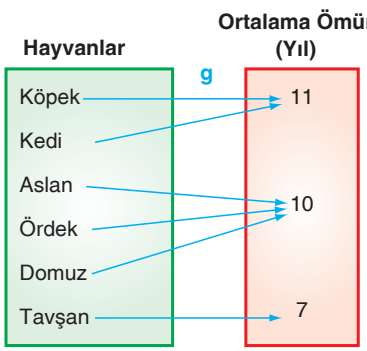
*oluyorsa $f$ fonksiyonu bire bir $(1 - 1)$ fonksiyondur.*

**23. Örnek**

*Şekil 1*




*Şekil 2*




**"Şekil 1" de bazı illeri yaklaşık nüfus değerlerine eşleyen $f$ fonksiyonu "Şekil 2" de ise bazı hayvanları ortalama ömür sürelerine eşleyen $g$ fonksiyonu verilmiştir. $f$ ve $g$ fonksiyonlarını inceleyelim.**

**Çözüm**

Bir grup insana, f fonksiyonuna göre nüfusu 11 milyon olan ili sorduğumuzu varsayalım. Gruptaki her kişi "İstanbul" cevabını verecektir. Aynı gruptan, g fonksiyonuna göre ortalama ömrü 11 yıl olan bir hayvanı söylemelerini istesek gruptakilerden bazıları "kedi" cevabını verirken bazıları da "köpek" cevabını verecektir. Peki f ve g fonksiyonları arasındaki fark nedir?

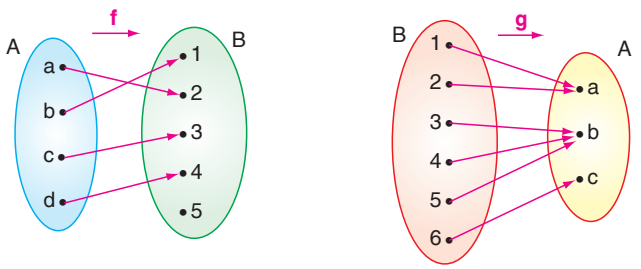
f fonksiyonunda tanım kümesindeki her elemanın görüntüsü birbirinden farklı olduğundan f bire bir fonksiyondur. g fonksiyonunun tanım kümesindeki bazı farklı elemanların görüntüsü aynı olduğundan g bire bir fonksiyon değildir.

## Örten Fonksiyon, İçine Fonksiyon

*Örten Fonksiyon*
*İçine Fonksiyon*

- *$f: A \to B$ olmak üzere her $y \in B$ için $f(x) = y$ olacak biçimde en az bir $x \in A$ varsa f fonksiyonu örten fonksiyondur, yani $f(A) = B$ ise f fonksiyonu örtendir.*
- *$f: A \to B$ olmak üzere $f(A) \neq B$ ise yani değer kümesinde eşlenmeyen en az bir eleman kalıyorsa f fonksiyonu içine fonksiyondur.*

**24. Örnek**




**Yukarıda şema ile gösterilen f ve g fonksiyonlarını inceleyelim.**

**Çözüm**

f fonksiyonunun değer kümesindeki 5 elemanı tanım kümesinden hiçbir elemanla eşleşmemiştir. Bu nedenle f içine fonksiyondur.

g fonksiyonunun değer kümesinde eşlenmeyen eleman olmadığından g örten fonksiyondur.

*A* ⊂ ℝ, *B* ⊂ ℝ, *A* ∩ *B* = *C* ve *C* ≠ ∅ olmak üzere,
*f*: *A* → ℝ, *g*: *B* → ℝ fonksiyonları için;

**Fonksiyonlarda Dört İşlem**

- $(f+g): C \to \mathbb{R}$,
  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f-g): C \to \mathbb{R}$,
  $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(f \cdot g): C \to \mathbb{R}$,
  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right): C \to \mathbb{R}$,
  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ dır.

**25. Örnek**

**$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$ ; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1 - x$ olmak üzere aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulalım.**

**a.** $(f+g)(-1)$ **b.** $(f-g)(2)$

**c.** $(f \cdot g)(-3)$ **ç.** $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$

**Çözüm**

**a.** $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
$= x^2 + x + 1 - x$
$= x^2 + 1$'dir.

$(f+g)(-1) = (-1)^2 + 1$
$= 1 + 1 = 2$ bulunur.

**b.** $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
$= x^2 + x - (1 - x)$
$= x^2 + 2x - 1$'dir.

$(f-g)(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 1$
$= 7$ bulunur.

**c.** $(f \cdot g)(-3) = f(-3) \cdot g(-3)$
$= [(-3)^2 - (-3)] \cdot [1 - (-3)]$
$= 6 \cdot 4$
$= 24$ bulunur.

**ç.** $\left(\frac{f}{g}\right)(-2) = \frac{f(-2)}{g(-2)}$
$= \frac{(-2)^2 + (-2)}{1 - (-2)}$
$= \frac{4-2}{3}$
$= \frac{2}{3}$ bulunur.

## 26. Örnek

**$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , $f(x) = 2^x$ olmak üzere her a ve b gerçek sayısı için $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim.**

*$f(x) = 2^x$ te $x$ yerine $a + b$ yazılır.*

**Çözüm**

$f(a+b) = 2^{a+b}$ dir. **...(I)**

$f(a) \cdot f(b) = 2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}$ dir. **...(II)**

**I** ve **II**'den her $a \in \mathbb{R}$ , $b \in \mathbb{R}$ için,

$f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$ olduğu görülür.

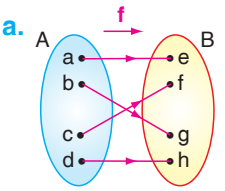
## 2.1.4 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıda verilen fonksiyonlara göre yandaki tabloyu örnekteki gibi doldurunuz.

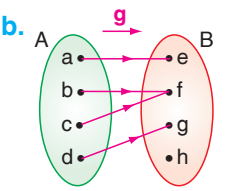
***Tablo:*** Fonksiyonlar ve Türleri

| | Bire Bir | Örten | İçine |
|---|---|---|---|
| f | ✓ | ✓ | ✗ |
| g | | | |
| h | | | |
| k | | | |
| l | | | |
| m | | | |

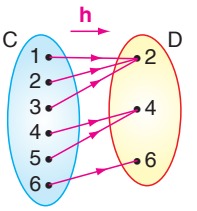
**a.**



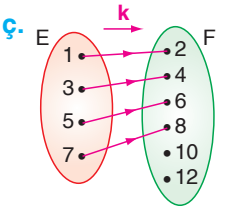

**b.**



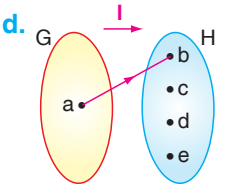

**c.**



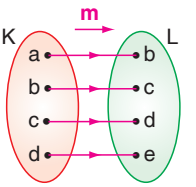

**ç.**




**d.**




**e.**




**2.** $\mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ , $g(x) = x^3 + x^2$ olmak üzere;

**a.** Aşağıdaki fonksiyonların kuralını bulunuz.

**i.** $(f \cdot g)(x)$ **ii.** $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

**b.** Aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz.

**i.** $(f+g)(0)$ **ii.** $(f-g)(1)$

**iii.** $(f \cdot g)(3)$ **iv.** $(2f-3g)(-2)$

# 2.1.1 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI

**1.** $A = \{1, 2, 3\}$ ve $B = \{4, 5, 6\}$ kümeleri için A'dan B'ye verilen aşağıdaki ilişkilerden hangileri fonksiyondur?

**a.** $f_1 = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4)\}$

**b.** $f_2 = \{(1, 6), (3, 5), (2, 4), (1, 4)\}$

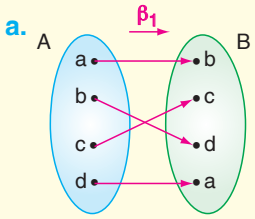
**c.** $f_3 = \{(2, 5), (3, 5)\}$

**ç.** $f_4 = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$

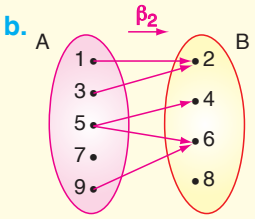
**d.** $f_5 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 4), (1, 6), (2, 6)\}$

**2.** Aşağıda şema ile gösterilen ve A'dan B'ye tanımlanan ilişkilerden hangileri fonksiyondur? Fonksiyon olanların görüntü kümelerini yazınız.

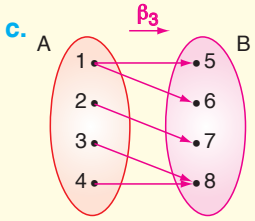
**a.**



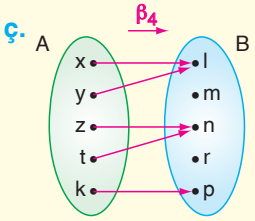

**b.**




**c.**




**ç.**




**3.** $f: A \to B$, $f(x) = x^3 - 1$ ve $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ olduğuna göre;

**a.** $f(A)$ görüntü kümesini bulunuz.

**b.** $f$ kümesini sıralı ikililer hâlinde yazınız.

**4.** $f = \{(a, 1), (c, 2), (b, 3), (1, 2), (3, b)\}$ bir fonksiyon olduğuna göre tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

**5.** Görüntü kümesi, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ verildiğine göre aşağıda $A \to B$ tanımlanan fonksiyonların tanım kümelerini liste biçiminde yazınız.

**a.** $f(x) = -x + 1$ **b.** $g(x) = 2x - 1$

**c.** $h(x) = \frac{x+1}{2}$ **ç.** $k(x) = \frac{1-x}{3}$

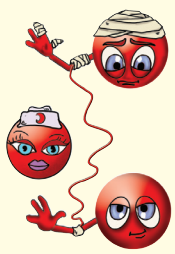
**d.** $m(x) = \frac{2x-1}{2}$ **e.** $n(x) = \frac{1-3x}{2x+3}$

**6.** Birçok hastalık durumunda kan nakline ihtiyaç duyulmaktadır. Her kan grubunda, kendi içinde kan alışverişi yapılırken asıl kan grubundan yeterli miktarda kan bulunamaması durumunda farklı kan grupları arasında kan alışverişi yapılabilmektedir.

Aşağıdaki tablo kan grupları arasındaki kan alışverişini göstermektedir.

***Tablo:*** Kan Alışverişi

| ALICI \ VERİCİ | 0 | A | B | AB |
|---|---|---|---|---|
| AB | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| B | ✓ | | ✓ | |
| A | ✓ | ✓ | | |
| 0 | ✓ | | | |



Buna göre;

**a.** $K = \{0, A, B, AB\}$ olmak üzere tablodaki verileri kullanarak $K \to K$'ye fonksiyon olan ve olmayan birer matematiksel ilişkiyi sıralı ikililerin kümesi şeklinde yazınız.

**b.** Yazdığınız ilişkileri şema ve tablo ile gösteriniz.

# 2.1.1 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI

**7**'den **12**'ye kadar sorularda aşağıdaki değerlerin her birini bulunuz.

**a.** $f(-2)$ **b.** $f\left(-\frac{1}{3}\right)$ **c.** $f(1)$ **ç.** $f(f(2))$

**7.** $f(x) = x + 1$

**8.** $f(x) = \frac{1}{2x-1}$

**9.** $f(x) = x^2 + 3$

**10.** $f(x) = \frac{2}{x^2+3}$

**11.** $f(x) = \sqrt{5x+1}$

**12.** $f(x) = |x - 1| + 3$

**13**'ten **16**'ya kadar sorularda aşağıdaki değerlerin her birini bulunuz.

**a.** $g(-a)$ **b.** $g\left(\frac{1}{a}\right)$ **c.** $g(\sqrt{a})$ **ç.** $g(a^2)$

**13.** $g(x) = \frac{2}{3x}$

**14.** $g(x) = x^2 + 4$

**15.** $g(x) = \frac{1}{x^2+4}$

**16.** $g(x) = \sqrt{2 + x^2 + x^4}$

**17.** Aşağıdaki fonksiyonlarda $h(a) = 5$ koşulunu sağlayan tüm $a$ değerlerini bulunuz.

**a.** $h(x) = 2x + 3$ **b.** $h(x) = \frac{1}{4x+1}$

**c.** $h(x) = \sqrt{x^2+16}$ **ç.** $h(x) = x^3 - 3$

**d.** $h(x) = \sqrt[3]{x+25}$ **e.** $h(x) = |x^2 - 4|$

**18.** Aşağıda kuralı verilen fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

**a.** $f(x) = 9 - x^2$ **b.** $g(x) = x^3 + 3$

**c.** $h(x) = \sqrt{x^2}$ **ç.** $k(x) = (\sqrt{x})^2$

**d.** $f(x) = \sqrt{2x+7}$ **e.** $m(x) = \sqrt[3]{x+3}$

**f.** $n(x) = \sqrt{1-3x}$ **g.** $p(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$

**ğ.** $r(x) = \frac{4}{5-x}$ **h.** $s(x) = \sqrt{\frac{4}{5-x}}$

**ı.** $t(x) = \sqrt{x^2+4}$ **i.** $u(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$

**j.** $v(x) = \sqrt{|x+2|-3}$ **k.** $z(x) = \frac{x+5}{|x+2|-3}$

**19.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = \frac{x}{2}$ ve $g(x) = -x + 1$ veriliyor.

$f(2a) = g(-2a)$ eşitliği sağlandığına göre $a$ kaçtır?

**20.** Babası, Hakan'ın yeni kumbarasına 1 TL atmış ve her gün bir önceki gün attığı paradan 2 TL daha fazla para atacağına söz vermiştir. Buna göre;

**a.** 10. güne kadar her gün Hakan'ın kumbarasında biriken parayı gösteren bir tablo hazırlayınız.

**b.** Tabloyu inceleyerek geçen gün sayısı (t) ile kumbarada biriken para miktarı (P) arasındaki ilişkiyi analiz ediniz.

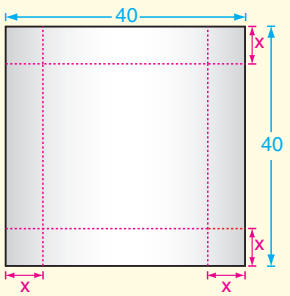
**c.** P'yi, t'nin bir fonksiyonu olarak ifade ediniz.

**21.** Bir kenarının uzunluğu x cm ve çevresi 50 cm olan dikdörtgenin alanının;

$$A(x) = x.(25 - x) \ , \ 0 \le x \le 50$$

fonksiyonu ile verilebileceğini gösteriniz.

**22.** Üstü açık bir kutu kenar uzunluğu 40 cm olan kare şeklindeki bir kartondan oluşturulacaktır. Öncelikle bu kartonun köşelerinden kenar uzunluğu x cm olan 4 kare kesilip çıkarılıyor. Sonra elde edilen 4 kanat tabanı kare ve yüksekliği x olacak kutunun yanal yüzlerini oluşturmak üzere (noktalı doğrular boyunca) yukarı kaydırılıyor.




Buna göre;

**a.** Kutunun hacmini (V) x'in bir fonksiyonu olarak ifade ediniz.

**b.** Oluşan kutunun yüksekliği 5 cm ise hacmi kaç $cm^3$ tür?

*(Bir prizmanın hacminin taban alanı ve yüksekliğinin çarpımı ile bulunduğunu hatırlayınız.)*

**23.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & , \ x \ge 3 \text{ ise} \\ x^2 + 2x + 1 & , \ x < 0 \text{ ise} \\ 4 - 3x & , \ 0 \le x < 3 \text{ ise} \end{cases}$

verildiğine göre $f(1) + f(3)$ değerini bulunuz.

**24.** Levent, Canan'a aklından 1 ile 30 arasında bir sayı tutmasını, bu sayıya 10 eklemesini ve sonucu 2 ile çarpmasını söyler. Daha sonra, sonuçtan 4 çıkarıp kalanı 4'le bölmesini ve sonucu kendisine söylemesini ister.

**a.** Yukarıdaki durumu modelleyen bir fonksiyon yazınız.

**b.** Bu fonksiyonun tanım ve görüntü kümesini yazınız.

**c.** Canan'ın Levent'e söylediği sayı 10 ise Canan'ın aklından tuttuğu sayı kaçtır?

**25.** $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ olmak üzere $f(x) = (2m - n)x + m - 2n$'dir. f birim fonksiyon ise (m, n) sıralı ikilisini bulunuz.

**26.** $A = \{-1, 0, 1\}$ ve $B = \{0, 1, 2\}$ kümeleri veriliyor. $f: A \to B$, $f(x) = x - x^3 + 1$ olduğuna göre f sabit fonksiyon mudur? Neden?

**27.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (a-1)x^2 - 3bx - a + b + 3$'tür. $f$ sabit fonksiyon olduğuna göre $f(45)$ değeri kaçtır?

**28.** $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$f(x) = (a-1)x + b - 4$ ve $g(x) = \dfrac{2a - bx}{cx + 4}$ veriliyor. $f$ birim fonksiyon ve $g$ sabit fonksiyon ise $a + \dfrac{b}{c}$ kaçtır?

**29.** Bir ilde uygulanan taksi ücreti tarifesine göre açılış ücreti 2,7 TL olup yolculardan her 1 km için 2,4 TL talep edilmektedir. Buna göre;

**a.** Taksi ücretini, gidilen toplam yol uzunluğunun ($x$ km) fonksiyonu şeklinde yazınız.

**b.** Bu ilde taksiye binen bir kişi 24 km'lik bir yol için kaç TL öder?

**c.** Bu ilde taksiye binen bir kişi taksi ücreti olarak 74,7 TL ödediğine göre kaç km seyahat etmiştir?

**30.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, doğrusal bir fonksiyon ve $f(1) = -3$, $f(-4) = 2$ olduğuna göre $f(0)$ kaçtır?

**31.** $A = \{0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ kümeleri için $f: A \to B$, $f(x) = -x^2 - 1$ ve $g: A \to B$, $g(x) = -x - 1$ veriliyor.

$f(A)$ ve $g(A)$ kümelerini bulunuz. $f$ ve $g$ fonksiyonları eşit fonksiyonlar mıdır? Neden?

**32.** $f$ çift fonksiyon olmak üzere aşağıda verilen fonksiyonlardan tek, çift ya da ne tek ne de çift fonksiyon olanları belirleyiniz.

**a.** $y = f(-x)$ **b.** $y = -f(x)$

**c.** $y = f(2x)$ **ç.** $y = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$

**d.** $y = f(x) - 2$ **e.** $y = f\left(\dfrac{x}{2} + 3\right)$

**33.** Gerçek sayılar kümesinde tanımlı $f$ ve $g$ fonksiyonları,

$(f + g)(x) = x^2$

$(f - g)(2x) = 2x$

eşitliklerini sağlıyor.

Buna göre $\dfrac{f(6)}{g(6)}$ ifadesinin eşiti kaçtır?

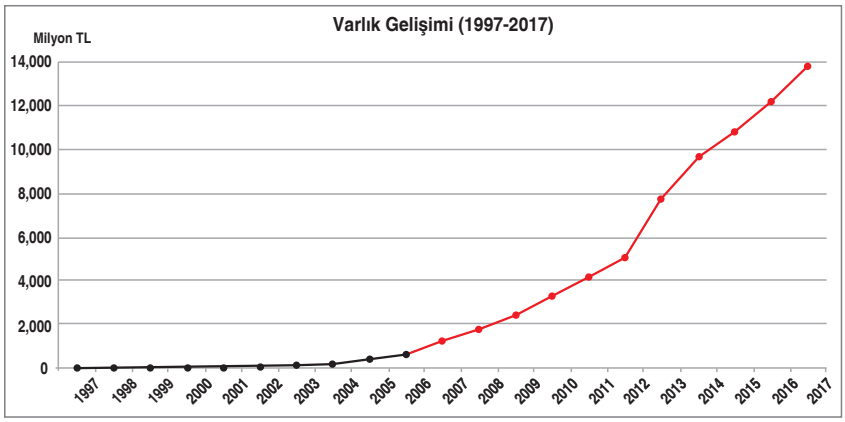
## Fonksiyon Grafikleri

Günlük Hayat Bağlantısı

Bireysel emeklilik sistemi; gelir elde edilen dönemlerde tasarruf yapılmasını ve emeklilik döneminde gelir elde edilmesini sağlayan, birikimlerin profesyonel portföy yönetim şirketleri tarafından yönetildiği, devlet katkısı avantajıyla desteklenen ve denetlenen bir sistemdir. Günümüzde oldukça yaygınlaşan bu sistemin 3,1 milyonu aşkın katılımcısı bulunmaktadır.

*Kendimizin ve ailemizin, temel ihtiyaçlarını karşılamak; kaza, sağlık problemleri gibi beklenmedik durumlarla baş edebilecek birikimi sağlamak; emekliliğimizde rahat bir yaşam sürdürebilmek gibi nedenlerle gelirimizi artırmak isteriz. Bu hedeflerimize ulaşmak için tasarruf yapmamız gerekir. Kendimiz ve ailemize karşı sorumluluklarımızdan biri de tasarruf yapmaktadır.*

Yandaki grafik bir portföy yönetim şirketinin 1997 – 2017 yılları arasında varlığını (toplam üye birikimlerini) göstermektedir.



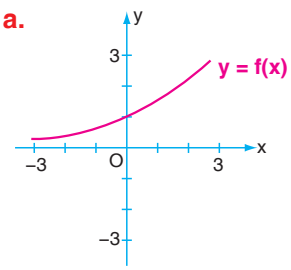

Grafik göstermektedir ki yıllar geçtikçe şirketin varlığı da artmaktadır. Şirketin varlığı 1997 – 2017 arasında geçen yılların bir fonksiyonudur ve bu fonksiyon yandaki grafik ile gösterilmiştir.

2030 yılında şirketin toplam üye birikimlerinin kaç milyon TL olacağını tahmin ediniz. Tahmininizi yaparken hangi metodu kullandığınızı açıklayınız.

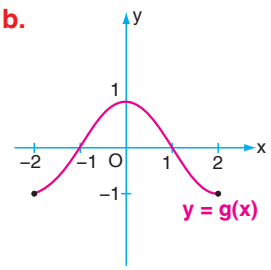
### 27. Örnek

**Grafiği verilen fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulalım.**

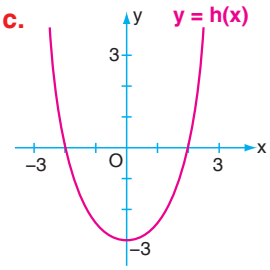
**a.**




**b.**




**c.**




**Çözüm**

**a.** f fonksiyonunun grafiği ile x ekseni $(-\infty, \infty)$ aralığında, y ekseni ise $(0, \infty)$ aralığında eşleşir. O hâlde f fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$, görüntü kümesi $\mathbb{R}^+$ dır.

**b.** g fonksiyonunun tanım kümesi $[-2, 2]$, görüntü kümesi $[-1, 1]$'dir.

**c.** h fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}$, görüntü kümesi $[-3, \infty)$ aralığıdır.

## Dikey Doğru Testi

**Tablo:** Üretilen Kelaynakların Sayısı

| Yıllar | Üreyen Kuş Sayısı |
|---|---|
| 1977 | 34 |
| 1980 | 18 |
| 1983 | 13 |
| 1986 | 18 |
| 1989 | 15 |
| 1992 | 22 |
| 1995 | 24 |
| 1998 | 6 |

*Genel ağdan alınmıştır.*

**Bunları Biliyor musunuz?**

Göçmen kuşlardan olan kelaynaklar, yaz aylarında Afrika'dan göç edip Orta Doğu ülkeleri ve özellikle Urfa'nın Birecik ilçesine geliyordu. 1950'li yıllarda bölgede 600 çiftten fazla kelaynak görülmesine rağmen özellikle zararlı böcekler için kullanılan tarım ilaçlarından dolayı kelaynakların nesli azalmaya başladı. 1970'li yıllara gelindiğinde sayıları ellinin altına düşen kelaynaklar koruma altına alındı. Birecik'teki koruma istasyonunda üretilmeye başlanan kelaynakların günümüzdeki sayısı 300'dür.

*Genel ağdan alınmıştır.*

### 28. Örnek

1977 – 1998 yılları arasındaki bazı yıllar için Birecik Kelaynak Koruma İstasyonunda, koruma altındaki kelaynaklardan üretilen yavru kelaynakların sayıları yandaki tablo ile gösterilmiştir. Buna göre;

**a. Tablodaki bilgileri sıralı ikililerin kümesi şeklinde ifade edelim.**

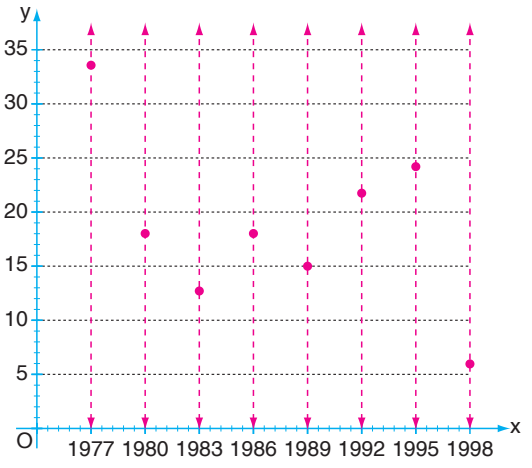
**b. Bu ilişkinin grafiğini çizelim ve bir fonksiyon belirtip belirtmediğini açıklayalım.**

**Çözüm**

**a.** Yandaki tablonun birinci sütunundaki yılların oluşturduğu küme A, bu yıllarda üreyen kuş sayılarını gösteren tablonun ikinci sütunundaki sayıların kümesi B olmak üzere tablodaki verileri A'dan B'ye sıralı ikililerin kümesi şeklinde yazabiliriz.

$f = \{(1977, 34), (1980, 18), (1983, 13), (1986, 18), (1989, 15), (1992, 22), (1995, 24), (1998, 6)\}$

**b.** Şimdi de f ile isimlendirdiğimiz matematiksel ilişkiyi grafik ile gösterelim. Bunun için f'nin elemanı olan her bir sıralı ikiliyi analitik düzlemde göstermeliyiz.




Tanım kümesindeki elemanlardan yandaki f'nin grafiğine dikey doğrular çizilirse (kırmızı kesik çizgi ile gösterilen doğrular) her bir dikey doğru, grafiği yalnızca bir noktada keser. Yani, f'yi oluşturan sıralı ikililerin birinci bileşenleri birbirinden farklıdır. Bu durum bize, f'nin tanım kümesindeki her bir elemanın yalnız bir elemanla eşleştiğini gösterir. O hâlde f bir fonksiyon belirtir.

***Düşey Doğru Testi***

*Bir grafiğin fonksiyon grafiği olup olmadığını anlamak için, tanım kümesinden y eksenine paralel doğrular çizilir. Bu şekilde çizilebilen her bir doğru grafiği yalnız bir noktada kesiyorsa grafik, fonksiyon grafiğidir.*

*Dikey doğruları kullanarak verilen bir sıralı ikililer kümesinin fonksiyon olup olmadığını belirleme işlemine dikey (düşey) doğru testi denir.*

## 29. Örnek

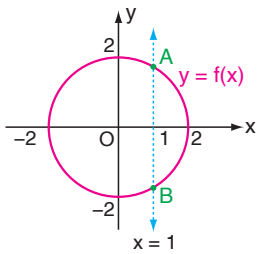
**Yanda verilen grafiklere göre f ve g'nin fonksiyon olup olmadığını belirleyelim.**

### Çözüm

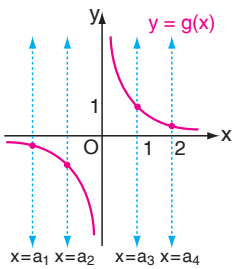
$y = f(x)$ in tanım kümesi $[-2, 2]$ aralığıdır. "Grafik 1"de de görüldüğü gibi denklemi $x = 1$ olan doğru $y = f(x)$'in grafiğini A ve B gibi iki noktada kestiğinden f bir fonksiyon değildir.

$y = g(x)$'in tanım kümesi $\mathbb{R} - \{0\}$'dır. "Grafik 2"de de görüleceği gibi $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere denklemi $x = a$ olan her doğru, $y = g(x)$'in grafiğini yalnız bir noktada keser. Bu nedenle g bir fonksiyondur.

*Grafik 1*



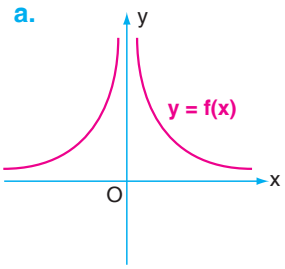

*Grafik 2*



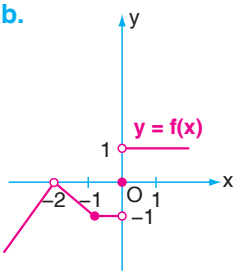

## 2.1.5 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini belirleyiniz.

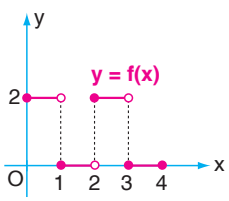
**a.**



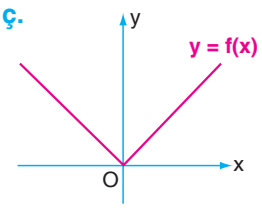

**b.**




**c.**




**ç.**




**2.** Aşağıdaki tablo bir ilde Meteoroloji Genel Müdürlüğü tarafından dört gün boyunca farklı zamanlarda ölçülen basınç ve sıcaklık değerlerini göstermektedir.

***Tablo:*** Basınç ve Sıcaklık

| **Basınç (Bar)** | 1,012 | 1,008 | 0,996 | 0,994 | 0,996 | 1 | 1,008 | 1,011 | 1,019 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Sıcaklık (°C)** | 4 | 5 | 11 | 9 | 7 | 4 | 1 | –2 | –4 |

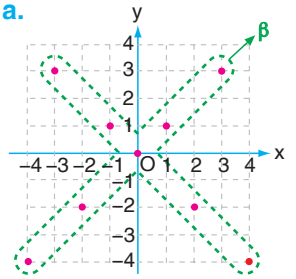
Tablonun birinci satırındaki basınç değerlerinin kümesi A, ikinci satırındaki sıcaklık değerlerinin kümesi B olmak üzere;

**a.** Tablodaki verileri birinci bileşenler basıncı, ikinci bileşenler de sıcaklığı gösterecek şekilde A kümesinden B'ye sıralı ikililerin kümesi şeklinde yazınız.

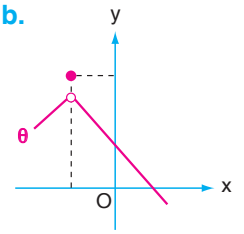
**b.** Bu ilişkinin grafiğini çiziniz ve fonksiyon olup olmadığını test ediniz.

**3.** Aşağıdaki grafiklerin bir fonksiyona ait olup olmadığını belirleyiniz.

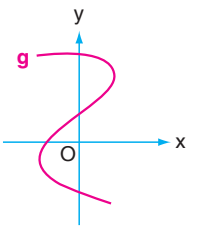
**a.**




**b.**

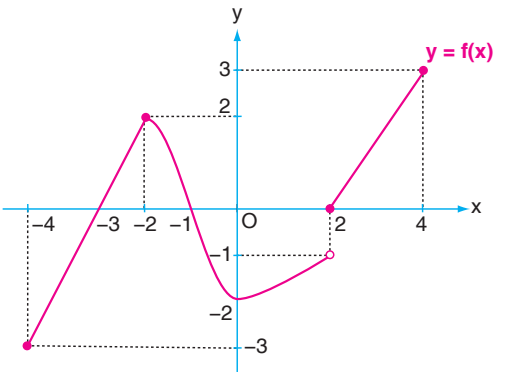



**c.**




## 30. Örnek

Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre;




**a. Aşağıdaki fonksiyon görüntülerini bulalım.**

**i.** $f(-4)$ **ii.** $f(-2)$

**iii.** $f(0)$ **iv.** $f(2)$

**v.** $f(4)$

**b.** $f(a) = 0$ **ise a'nın alacağı değerleri bulalım.**

**Çözüm**

**a.** **i.** $(-4, -3) \in f$ olduğundan $f(-4) = -3$'tür.

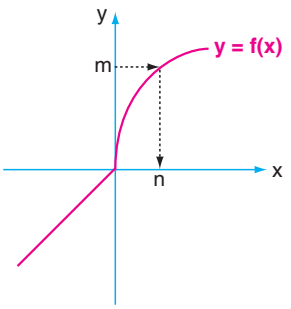
**ii.** $(-2, 2) \in f$ olduğundan $f(-2) = 2$'dir.

**iii.** $(0, -2) \in f$ olduğundan $f(0) = -2$'dir.

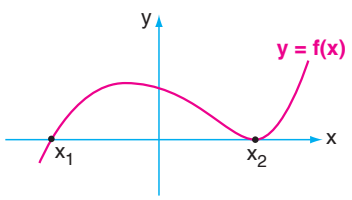
**iv.** $(2, 0) \in f$ olduğundan $f(2) = 0$'dır.

**v.** $(4, 3) \in f$ olduğundan $f(4) = 3$'tür.

**b.** $f(-3) = 0$, $f(-1) = 0$ ve $f(2) = 0$ olduğundan a'nın alabileceği değerler kümesi $\{-3, -1, 2\}$'dir.




- *y = m için x = n'dir.*
- *(n, m) ∈ f'dir.*
- *f(n) = m'dir.*
- *n'nin görüntüsü m'dir.*
- *m'nin ters görüntüsü n'dir.*




f(x) = 0'ın çözüm kümesi, $\{x_1, x_2\}$ dir.

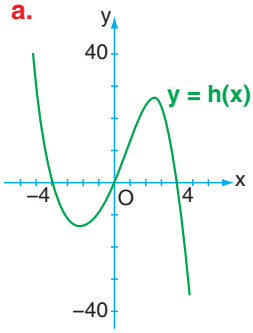
*f bir fonksiyon olmak üzere f(x) = 0 denkleminin çözüm kümesi fonksiyonun x eksenini kestiği veya x eksenine teğet olduğu noktaların apsisidir.*

## 31. Örnek

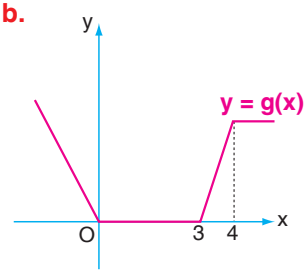
Aşağıda $h(x)$, $g(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

**Sırasıyla $h(x) = 0$, $g(x) = 0$ ve $f(x) = 0$ denklemlerinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümelerini bulalım.**

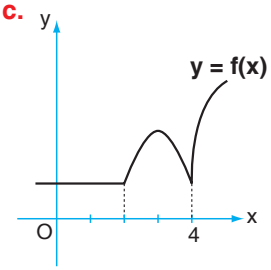
**a.**




**b.**




**c.**




### Çözüm

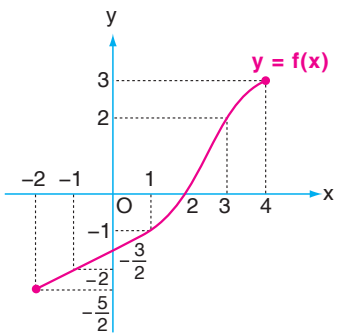
**a.** $h(x)$ fonksiyonunun grafiği $x$ eksenini $(-4, 0)$, $(0, 0)$ ve $(4, 0)$ noktalarında keser. O hâlde $h(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\{-4, 0, 4\}$ tür.

**b.** $g(x)$ fonksiyonunun grafiği $x$ ekseni ile $[0, 3]$ aralığında çakışıktır. O hâlde $g(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesi $[0, 3]$ aralığıdır.

**c.** $f(x)$ fonksiyonunun grafiği $x$ eksenini kesmez veya $x$ eksenine teğet değildir. O hâlde $f(x) = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\varnothing$'dir.

## 32. Örnek

**Yandaki $f$ fonksiyonunun grafiğine göre aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulalım.**




**a.** $f(a) = 2$ ise $a$ kaçtır?

**b.** $f(b) = -\frac{3}{2}$ ise $b$ kaçtır?

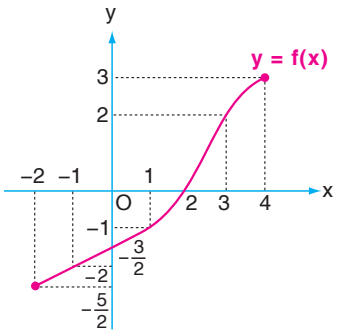
**c.** $f(f(2))$

**ç.** $f(f(4))$

### Çözüm

**a.** $f(a) = 2$ ve grafiğe göre $y = 2$'nin ters görüntüsü $x = 3$ olduğundan, $f(3) = 2$, yani $a = 3$'tür.

**b.** $f(b) = -\frac{3}{2}$ ve grafiğe göre $y = -\frac{3}{2}$'nin ters görüntüsü $x = 0$ olduğundan $f(0) = -\frac{3}{2}$, yani $b = 0$'dır.




**c.** Grafiğe göre $x = 2$'nin görüntüsü $y = 0$ olduğundan $f(2) = 0$'dır.

Ayrıca $f(0) = -\frac{3}{2}$ olduğundan,

$f(\underbrace{f(2)}_{0}) = f(0) = -\frac{3}{2}$ bulunur.

**ç.** Grafiğe göre $x = 4$'ün görüntüsü $y = 3$ olduğundan $f(4) = 3$'tür.

Ayrıca $f(3) = 2$ olduğundan,

$f(\underbrace{f(4)}_{3}) = f(3) = 2$ bulunur.

---

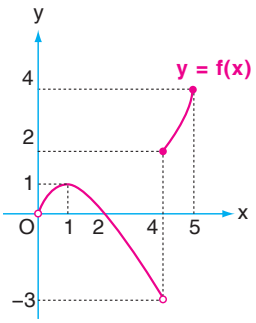
## 33. Örnek

**Yandaki f fonksiyonunun grafiğine göre;**

**a. $f(f(a)) = 2$ ise a kaçtır?**

**b. $f(A) = [2, 4]$ ise A kümesini bulalım.**

**c. $f((0, 4]) = B$ ise B kümesini bulalım.**




*Grafik 1*

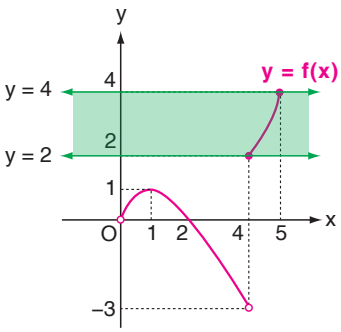
### Çözüm

**a.** Grafiğe göre $y = 2$'nin ters görüntüsü $x = 4$ olduğundan $f(4) = 2$'dir.

O hâlde $f(\underbrace{f(a)}_{4}) = 2 \Rightarrow f(a) = 4$'tür.

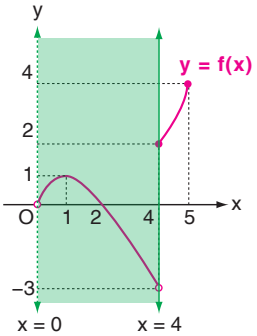
$y = 4$'ün ters görüntüsü $x = 5$ olduğundan $f(5) = 4$'tür.

O hâlde $f(a) = 4 \Rightarrow a = 5$ bulunur.




*Grafik 2*

**b.** "Grafik 1"deki gibi $y = 2$ ve $y = 4$ doğrularını çizelim. Bu iki doğru arasında f'nin grafiği ile x ekseni eşleştirildiğinde x ekseninde eşleşen elemanların $[4, 5]$ olduğu görülür. O hâlde $A = [4, 5]$'tir.



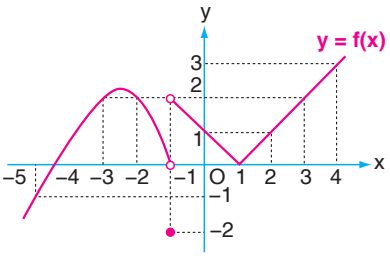

**c.** "Grafik 2"deki gibi $x = 0$ ve $x = 4$ doğrularını çizelim. 0 değeri $(0, 4]$ aralığına dâhil olmadığından $x = 0$ doğrusunu kesikli çizgi ile gösterelim. Bu iki doğru arasında f'nin grafiği ile y ekseni eşleştirildiğinde y ekseninde eşleşen elemanların $(-3, 1] \cup \{2\}$ olduğu görülür.

O hâlde $B = (-3, 1] \cup \{2\}$'dir.

---

## 2.1.6 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1, 2 ve 3. soruları yanda verilen f fonksiyonunun grafiğine göre cevaplayınız.**




**1.** **a.** Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

**i.** $f(-3)$ **ii.** $f(-2)$ **iii.** $f(-1)$

**iv.** $f(0)$ **v.** $f(1)$ **vi.** $f(3)$

**b.** $f(a) = 0$ ise a'nın alabileceği değerler nelerdir?

**c.** $f(b) = 2$ ise b'nin alacağı değerler nelerdir?

**ç.** $f(c) = 1$ ise c kaç farklı değer alabilir?

**2.** Aşağıda istenenleri bulunuz.

**a.** $f(m) = -1$ ise m kaçtır?

**b.** $f(n) = 3$ ise n kaçtır?

**c.** $f(f(-3))$

**ç.** $f(f(1))$

**d.** $f(f(f(3)))$

**e.** $f(f(f(2)))$

**3.** Aşağıda istenenleri bulunuz.

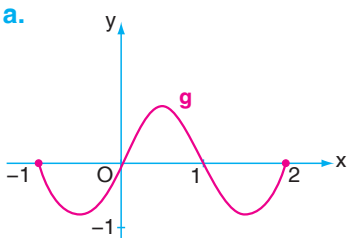
**a.** $f(f(k)) = -2$ ise k kaçtır?

**b.** $f([-1, 2)) = A$ ise A kümesi nedir?

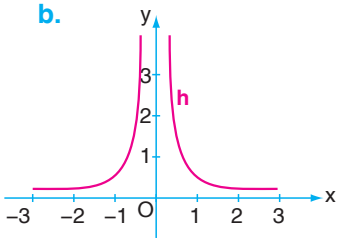
**c.** $f(B) = [0, 2]$ koşulunu sağlayan bir B kümesi yazınız.

**4.** Aşağıda $g(x)$, $h(x)$ ve $p(x)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. $g(x) = 0$, $h(x) = 0$ ve $p(x) = 0$ denklemlerinin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümelerini bulunuz.

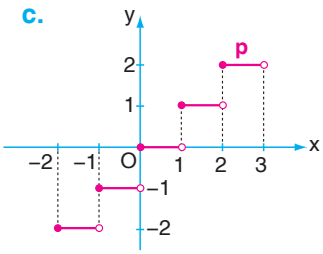
**a.**



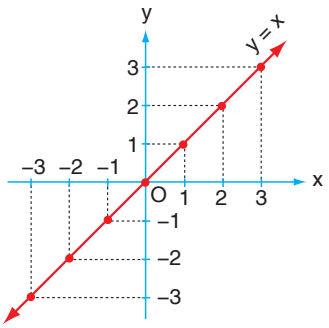

**b.**




**c.**



## Doğrusal Fonksiyonların Grafikleri




### 34. Örnek

**f: ℝ → ℝ, f(x) = x olmak üzere f fonksiyonunun grafiğini çizelim.**

**Çözüm**

Yanda x'in bazı değerleri için f(x) değerleri tabloda gösterilmiştir.

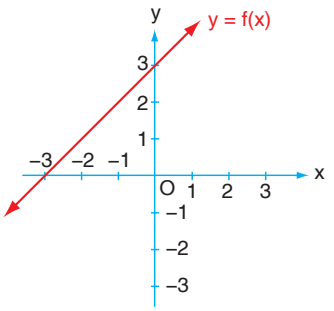
Bulunan (x, f(x)) sıralı ikilileri analitik düzlemde gösterilir ve çizgi ile birleştirilirse y = x birim fonksiyonunun grafiği yandaki gibi bulunur.

*Tablo:* x'in Bazı Değerleri için f(x) Değerleri

| x | y |
|---|---|
| –3 | –3 |
| –2 | –2 |
| –1 | –1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |

**UYARI**

Farklı iki noktadan yalnız bir doğru geçer. Bu nedenle sadece iki nokta bularak da f(x) = x'in grafiğini çizebilirdik.




### 35. Örnek

**f: ℝ → ℝ, f(x) = x + 3 veriliyor. f fonksiyonunun grafiğini çizelim.**

**Çözüm**

f(x) = x + 3 kuralını sağlayan iki nokta belirleyelim.

| x | y |
|---|---|
| 0 | 3 |
| –3 | 0 |

x = 0 için y = 0 + 3 = 3,

y = 0 için 0 = x + 3 ⇒ x = –3'tür.

O hâlde grafik yandaki gibidir.

### 36. Örnek

**f: ℝ → ℝ, $f(x) = -\frac{3x}{2}$ veriliyor. f fonksiyonunun grafiğini çizelim.**

**Çözüm**

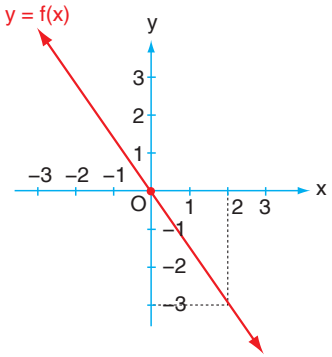
$f(x) = -\frac{3x}{2}$ kuralını sağlayan iki nokta bulalım.

| x | y |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 2 | –3 |

x = 0 için $y = -\frac{3 \cdot 0}{2} = 0$,

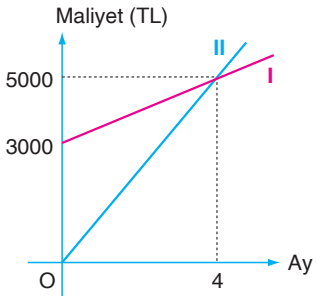
y = –3 için $-3 = -\frac{3 \cdot x}{2}$ ⇒ x = 2'dir.

O hâlde grafik yandaki gibidir.




## 37. Örnek

**Yanda iki ürünün aylara göre maliyet grafiği verilmiştir. Buna göre 12. ayın sonunda iki ürünün maliyetleri arasındaki farkı bulalım.**




### Çözüm

- I. ürünün başlangıçta 3000 TL sabit maliyeti vardır. Bu ürünün 4 ayda oluşan maliyeti de
  5000 – 3000 = 2000 TL'dir.

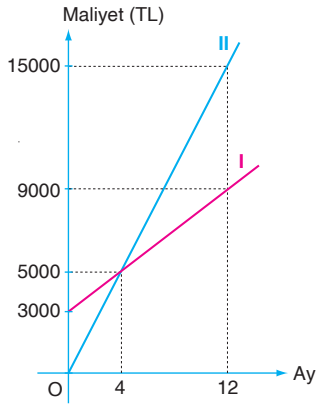
  I. ürünün grafiği doğrusal olup aylara göre oluşacak maliyeti de orantılı olacaktır.

  4 ayda → 2000 TL maliyet oluşuyorsa
  12 ayda → A TL maliyet oluşur.

  Doğru Orantı

  $A \cdot 4 = 12 \cdot 2000 \Rightarrow A = 6000$ TL bulunur.

  I. ürünün 12 ay sonunda toplam maliyeti
  6000 + 3000 = 9000 TL'dir.




- II. ürünün 4 ayda oluşan maliyeti 5 000 TL'dir.

  4 ayda → 5000 TL maliyet oluşuyorsa
  12 ayda → B TL maliyet oluşur.

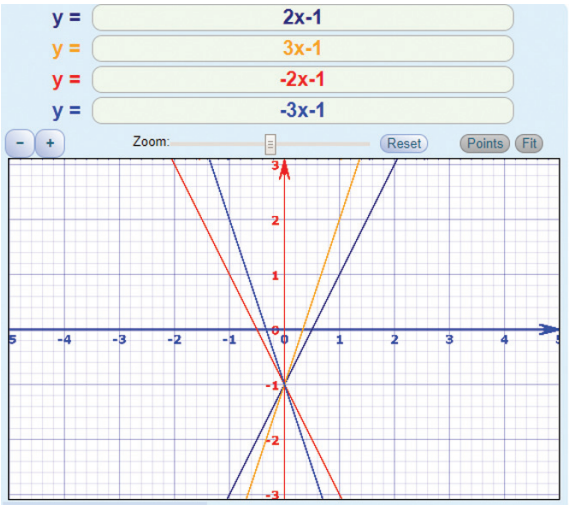
  Doğru Orantı

  $B \cdot 4 = 12 \cdot 5000 \Rightarrow B = 15000$ TL bulunur.

12. ayda bu iki ürünün maliyet farkı
15000 – 9000 = 6000 TL'dir.

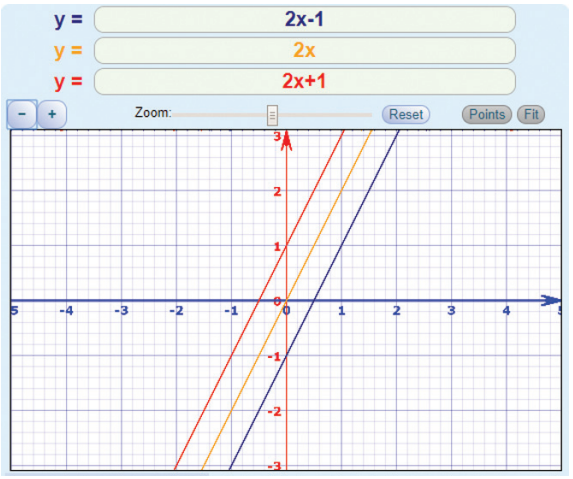
## İnceleyelim

**I. Grafik çizim programı kullanarak kuralı $y = 2x - 1$, $y = 3x - 1$, $y = -2x - 1$ ve $y = -3x - 1$ olan fonksiyonların grafiklerini çizip kıyaslayalım.**




Yukarıdaki arayüzden de anlaşılacağı gibi $y = mx + b$ fonksiyonunun grafiği $|m|$ değeri büyüdükçe *(diğer bir deyişle $m$ mutlak değerce büyüdükçe)* $y$ eksenine yaklaşır.

**II. Grafik çizim programı kullanarak kuralı $y = 2x - 1$, $y = 2x$ ve $y = 2x + 1$ olan fonksiyonların grafiklerini çizip kıyaslayalım.**




Yukarıdaki arayüzden de anlaşılacağı gibi $y = mx + b$ fonksiyonunun grafiği $b$ değeri değiştikçe $y$ ekseni boyunca yukarı ya da aşağıya ötelenir.

$y = mx + b$ fonksiyonunun grafiği;

- $b > 0$ ise, $y = mx$ fonksiyon grafiğinin $b$ birim yukarı ötelenmesi ile bulunur.
- $b < 0$ ise, $y = mx$ fonksiyon grafiğinin $b$ birim aşağıya ötelenmesi ile bulunur.

## 2.1.7 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** **a.** $f(x) = 3x + 2$ **b.** $f(x) = 4x - 3$

**c.** $f(x) = -2x + 3$ **ç.** $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

**d.** $f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$ **e.** $f(x) = 2$

Aşağıda istenenleri yukarıda verilen her bir fonksiyon için yapınız.

**i.** Fonksiyona ait grafiğin eğimini ve y eksenini kestiği noktayı bulunuz.

**ii.** Fonksiyonun grafiğini çiziniz.

**2.** Aşağıda tablo ile verilen fonksiyonların doğrusal fonksiyon olup olmadıklarını belirleyiniz.

**a.** ***Tablo:*** $y = f_1(x)$

| x | $y = f_1(x)$ |
|---|---|
| −2 | 4 |
| −1 | 1 |
| 0 | −2 |
| 1 | −5 |
| 2 | −8 |

**b.** ***Tablo:*** $y = f_2(x)$

| x | $y = f_2(x)$ |
|---|---|
| −2 | −8 |
| −1 | −3 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 0 |

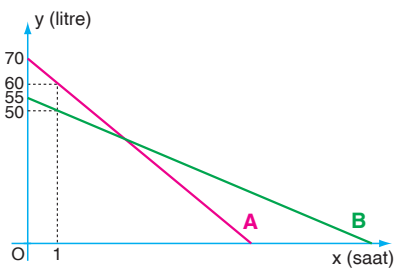
**c.** ***Tablo:*** $y = f_3(x)$

| x | $y = f_3(x)$ |
|---|---|
| −2 | −4 |
| −1 | −3,5 |
| 0 | −3 |
| 1 | −2,5 |
| 2 | −2 |

**ç.** ***Tablo:*** $y = f_4(x)$

| x | $y = f_4(x)$ |
|---|---|
| −2 | 0 |
| −1 | 1 |
| 0 | 4 |
| 1 | 9 |
| 2 | 16 |

**3.** Yandaki grafik sabit hızla hareket eden A ve B araçlarının yolda geçen süreye göre depolarında kalan benzin miktarını göstermektedir. Buna göre;




**a.** Her iki araba için zamana göre depolarında kalan benzin miktarını gösteren birer fonksiyon yazınız.

**b.** Grafiklerin eğimlerini yorumlayınız.

**c.** Hareketlerinden kaç saat sonra araçların depolarında kalan benzin miktarının eşit olacağını bulunuz.

## Parçalı Fonksiyonların Grafikleri

### 38. Örnek

**Kuralı** $f(x)=\begin{cases} 1 & , \quad x<0 \text{ ise} \\ 2x & , \quad 0\le x<1 \text{ ise} \\ x-1 & , \quad x\ge 1 \text{ ise} \end{cases}$

**olan fonksiyonun grafiğini çizelim.**

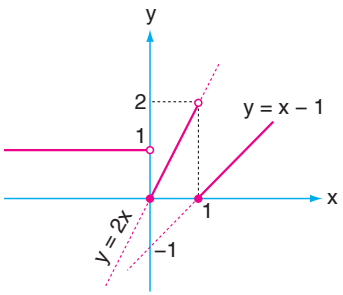
**Çözüm**

Önce $x < 0$ için $f(x) = 1$ fonksiyonunun grafiğini çizelim. $(0, 1)$ noktası grafiğe dâhil olmadığından bu noktaya içi boş yuvarlak koyalım.

Şimdi $0 \le x < 1$ için $f(x) = 2x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim. $x = 0$ için $f(x) = 2x$ ve $f(0) = 2.0 = 0$ olduğundan $(0, 0)$ noktasına içi dolu yuvarlak koyalım. $x = 1$ fonksiyonun bu kısmına dahil olmadığından $(1, 2)$ noktasına içi boş yuvarlak koyalım.

Şimdi de $x \ge 1$ için $f(x) = x - 1$ fonksiyonunun grafiğini çizelim. $x = 1$ için $f(x) = x - 1$ ve $f(1) = 1 - 1 = 0$ olduğundan $(1, 0)$ noktasına içi dolu yuvarlak koyalım.

O hâlde $f(x)$ fonksiyonunun grafiği yandaki gibidir.

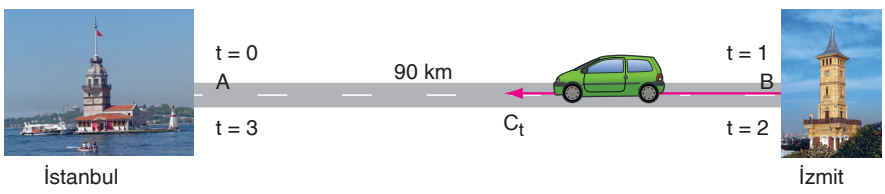



### 39. Örnek

Bir otomobilin $t = 0$ anında İstanbul'dan harekete başladığını ve 90 km/sa. sabit hızla seyahat ederek 1 saat sonra İzmit'e vardığını varsayalım. Otomobil İzmit'te tam 1 saat kalıyor. Sonra tekrar 90 km/sa. sabit hızla İstanbul'a geri dönüyor.

**Otomobilin konum fonksiyonunu hem sembolik olarak hem de grafik ile belirtelim.**

**Çözüm**




Otomobil 90 km/sa. sabit hızla ilerlediğinden $t = 1$'e kadar başlangıç noktasına (A ya) uzaklığı $90t$'dir.

$t = 1$'de otomobilin A noktasına uzaklığı $90.1 = 90$ km'dir. Otomobil $t = 1$ ve $t = 2$ arasında hareket etmediğinden bu aralıkta A noktasına uzaklığı 90 km olur.

**UYARI**

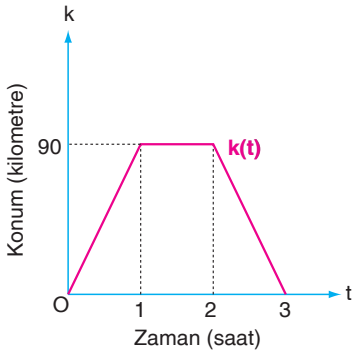
Fizik biliminde konum kavramı, bir hareketlinin harekete başladığı noktaya uzaklığı anlamına gelir.

$C_t$ otomobilin herhangi $t$ anında bulunduğu nokta olmak üzere $t = 2$ ve $t = 3$ arasında $A$ noktasına uzaklığı,

$$\underbrace{90}_{|AB|} - \underbrace{90(t-2)}_{|BC_t|} = 90 - 90t + 180 = 270 - 90t \text{ olur.}$$

Bu durumda konum fonksiyonunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$k(t) = \begin{cases} 90t & , \ 0 \le t < 1 \text{ ise} \\ 90 & , \ 1 \le t < 2 \text{ ise} \\ 270 - 90t & , \ 2 \le t \le 3 \text{ ise} \end{cases}$$




- Önce $0 \le t < 1$ için $k(t) = 90t$'nin grafiğini çizelim.

  $t = 0$ için $k(0) = 90 \cdot 0 = 0 \Rightarrow (0, 0) \in f$

  $t = 1$ fonksiyonunun bu kısmına dahil olmadığından $(1, 90)$ noktası bu aralıkta grafiğe dâhil edilmez.

  O hâlde bu aralıkta $(0, 0)$ noktası ile $(0, 0)$ ve $(1, 90)$ arasındaki doğrusal noktalar grafiğe dahildir.

- Şimdi $1 \le t < 2$ için $k(t) = 90$'nın grafiğini çizelim.

  Bu aralıkta tüm noktaların görüntüleri $90$ olduğundan $(1, 90)$ noktası ve bu nokta ile $(2, 90)$ arasındaki tüm doğrusal noktalar grafiğe dâhildir. Bu aralıkta $(2, 90)$ noktası grafiğe dâhil değildir.

- Son olarak $2 \le t \le 3$ için $k(t) = 270 - 90t$'nin grafiğini çizelim.

  $t = 2$ için $k(2) = 270 - 90 \cdot 2 = 90 \Rightarrow (2, 90) \in f$

  $t = 3$ için $k(3) = 270 - 90 \cdot 3 = 0 \Rightarrow (3, 0) \in f$

  Bu aralıkta $(2, 90)$ ile $(3, 0)$ noktaları ve bu iki nokta arasındaki tüm doğrusal noktalar grafiğe dahil edilir.

  O hâlde $y = f(x)$ in grafiği yukarıdaki gibidir.

### 2.1.2 Kritik Düşünme

Bir otomobil fabrikasının, ürettiği otomobillerin güvenliğini ölçmek için uyguladığı çarpışma testine göre duran bir araç belli bir hıza ulaşana kadar sürekli hızlanır. Sonra bu sabit hızla belli bir süre gider ve bir duvara çarpıp durur.

Buna göre çarpışma testi boyunca zamana göre aracın hızını gösteren fonksiyonu modelleyen bir grafik çiziniz.

## 40. Örnek

**$f(x) = x + 1$ olmak üzere $|f(x)|$'in grafiğini çizelim.**

### Çözüm

Önce $y = |f(x)|$'in kuralını parçalı fonksiyon şeklinde ifade edelim.

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$'dir.

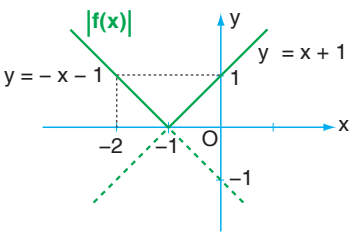
$x \leq -1$ için $f(x) = x + 1 \leq 0$ olduğundan,

$$|f(x)| = -(x + 1) = -x - 1$$

$x > -1$ için $f(x) = x + 1 > 0$ olduğundan,

$$|f(x)| = x + 1 \text{ olur.}$$

Yani $|f(x)| = \begin{cases} -x-1 & , \ x \leq -1 \text{ ise} \\ x+1 & , \ x > -1 \text{ ise} \end{cases}$ olur.




- Önce $x \leq -1$ için $|f(x)| = -x - 1$'in grafiğini çizelim. Bu aralıkta iki nokta bulalım.

| x | y |
|---|---|
| –1 | 0 |
| –2 | 1 |

$x = -1$ için $|f(-1)| = -(-1) - 1 = 0 \Rightarrow (-1, 0) \in f$

$x = -2$ için $|f(-2)| = -(-2) - 1 = 1 \Rightarrow (-2, 1) \in f$

Bu aralıkta $(-1, 0)$ ve $(-2, 1)$ noktasından geçen grafik çizilir ve grafiğin $(-1, 0)$ noktası ile bu noktanın solunda kalan kısmı grafiğe dâhil edilir.

- Şimdi de $x > -1$ için $|f(x)| = x + 1$'in grafiğini çizelim.

| x | y |
|---|---|
| –1 | 0 |
| 0 | 1 |

$x = -1$ için $|f(-1)| = -1 + 1 = 0 \Rightarrow (-1, 0) \in f$

$x = 0$ için $|f(0)| = 0 + 1 = 1 \Rightarrow (0, 1) \in f$

Bu aralıkta $(-1, 0)$ ile $(0, 1)$ noktalarından geçen grafik çizilir ve $(-1, 0)$ noktasının sağında kalan kısmı grafiğe dahil edilir.

O hâlde $y = |f(x)|$'in grafiği yukarıdaki gibidir.

**41. Örnek**

**$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = x - |x-1|$'dir. f fonksiyonunun grafiğini çizelim.**

**Çözüm**

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$'dir.

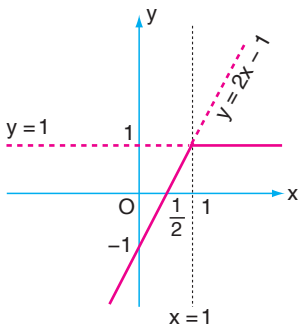
**a.** $x \le 1 \Rightarrow f(x) = x - [-(x-1)] = 2x - 1$'dir.

**b.** $x > 1 \Rightarrow f(x) = x - (x-1) = 1$'dir.

O hâlde $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , \ x \le 1 \\ 1 & , \ x > 1 \end{cases}$ olur.

$x \le 1$ için $f(x) = 2x - 1$'in grafiği, $x > 1$ için $f(x) = 1$'in grafiği çizilir.

O hâlde f fonksiyonunun grafiği yandaki gibidir.




## 2.1.8 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıda kuralı verilen parçalı fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

**a.** $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & , \ x \le -1 \\ x+2 & , \ x > -1 \end{cases}$

**b.** $g(x) = \begin{cases} x+4 & , \ x \le 0 \\ 3x+6 & , \ x > 0 \end{cases}$

**c.** $h(x) = \begin{cases} x & , \ x < 1 \\ x-1 & , \ 0 \le x < 1 \\ -2 & , \ x \ge 1 \end{cases}$

**ç.** $k(x) = \begin{cases} -2x & , \ x < -2 \\ 4 & , \ -2 \le x < 2 \\ x+1 & , \ x \ge 2 \end{cases}$

**UYARI**

"Öğrendiğimizi Uygulayalım" bölümünde çizilmesi istenen grafikleri herhangi bir çizim programı kullanmadan kendiniz çiziniz.

**2.** Bir banka, uyguladığı hediye kampanyası çerçevesinde, kredi kartı müşterilerinin tek seferde yaptıkları, 50 TL'ye kadar olan her harcama için harcama miktarının % 1'i, 50 TL'den 250 TL'ye kadar olan her harcama için harcama miktarının % 1,5'i ve 250 TL ile 250 TL'nin üzerindeki her harcama için 2 TL ve harcama miktarının % 2'si kadar da hediye puan vermektedir. Buna göre;

**a.** Alışveriş miktarı ile kazanılan puanları modelleyen bir fonksiyon yazınız.

**b.** Bu fonksiyonun tanım ve görüntü kümesini yazınız.

**c.** Fonksiyonun grafiğini çiziniz.

**ç.** Kredi kartını iki defa kullanarak 200 TL ve 300 TL'lik alışveriş yapan bir müşteri kaç TL hediye puan kazanır?

**3.** Aşağıda kuralı verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

**a.** $f(x) = |x-1|$ **b.** $g(x) = |x+3|$ **c.** $h(x) = x \,.\, |x|$

**ç.** $p(x) = \dfrac{|x|}{x}$ **d.** $r(x) = x + |x+1|$ **e.** $s(x) = |x+1| + |x+2|$

# 2.1.2 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI

**1.** Aşağıdaki ifadelerde noktalı yerleri tamamlayınız.

**a.** Analitik düzlemdeki bir grafik, ancak her ..... ..... doğrunun, grafiği en fazla ..... noktada kesmesi durumunda bir fonksiyon grafiği belirtir.

**b.** $(2, -4)$ noktası f fonksiyonunun grafiği üzerinde ise $f(....) = .....$

**c.** f fonksiyonunun x eksenini kestiği noktalar ..... denkleminin kökleridir.

**2.** Aşağıdaki ifadeler doğruysa boş kutulara "D", yanlışsa "Y" yazınız.

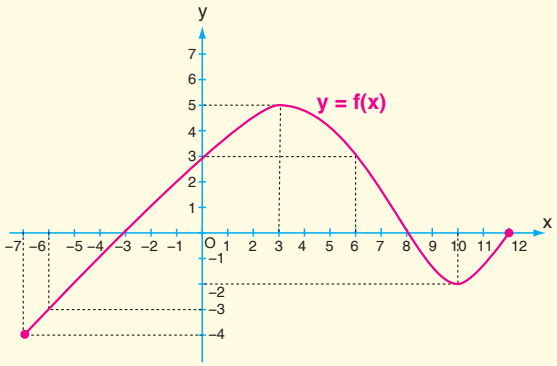
**a.** ☐ Bir fonksiyonun grafiği y eksenini birden fazla noktada kesebilir.

**b.** ☐ Her fonksiyon grafiği y eksenini keser.

**c.** ☐ Fonksiyon grafiğinin y eksenini kestiği nokta $f(0)$ değerini verir.

**3.** Sadece bir noktadan oluşan bir grafik, fonksiyon grafiği olabilir mi? Cevabınız evet ise bu durumu örnekleyen bir fonksiyon yazınız.

**4.**




Aşağıdaki soruları yukarıdaki grafiğe göre cevaplayınız.

**a.** Aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

**i.** $f(-6)$ **ii.** $f(-3)$ **iii.** $f(0)$

**iv.** $f(3)$ **v.** $f(6)$ **vi.** $f(10)$

**b.** f fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

**c.** f fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

**ç.** $f(x) = 0$ denkleminin kökleri nelerdir?

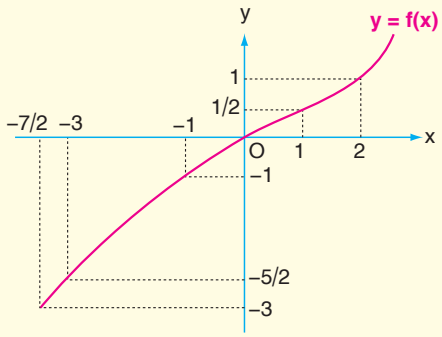
**d.** $f(x) = 1$ denkleminin kaç kökü vardır?

**e.** $f(x) = -\frac{1}{2}$ denkleminin kaç kökü vardır?

**f.** Aşağıda verilenlere göre a, b ve c değerlerini bulunuz.

**i.** $f(a) = -3$ **ii.** $f(b) = -4$ **iii.** $f(c) = 5$

**5.**




Aşağıda istenenleri yukarıda verilen f fonksiyonunun grafiğine göre bulunuz.

**a.** $f(-3)$

**b.** $f(0)$

**c.** $f(2)$

**ç.** $f(a) = \frac{1}{2}$ ise $a = ?$

**d.** $f(b) = -1$ ise $b = ?$

**e.** $f(c) = -\frac{5}{2}$ ise $c = ?$

**f.** $f(f(2))$

**g.** $f(f(-1))$

**ğ.** $f([-3, 1]) = A$ ise $A = ?$

**h.** $f(B) = [-1, 1]$ ise $B = ?$

# 2.1.2 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI

**6.** Burçin, okullarındaki "Bir Ağaç da Sen Dik" sosyal sorumluluk projesinin kurucularındandır. Proje kapsamında insanları bilgilendirecek ve ağaç dikilmesi için bağış yapmalarını özendirecek bilgiler içeren bir broşür yaptırmak istiyor. Broşür yaptırmak için gerekli maliyet ile ilgili araştırma sonuçları aşağıdaki gibidir.

En çok 50 sayfalık bir broşürün fiyatı (F) içerdiği sayfa sayısının (x) doğrusal bir fonksiyonudur. 10 sayfalık bir broşürün fiyatı 2 TL, 40 sayfalık bir broşürün fiyatı 6,50 TL'dir. Buna göre;

**a.** $y = F(x)$ fonksiyonunun kuralını yazınız.

**b.** 30 sayfalık bir broşürün basım fiyatını bulunuz.

**c.** $F(x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

**7.** Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz. Her bir grafik üzerinde en az üç nokta belirleyip koordinatlarını yazınız (Herhangi bir grafik çizim programı kullanmayınız.).

**a.** $f(x)=\dfrac{1}{x}$

**b.** $f(x)=\begin{cases} 2x & , \ x \neq 0 \text{ ise} \\ 1 & , \ x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

**c.** $f(x)=\begin{cases} x+2 & , \ -2 \leq x < 1 \text{ ise} \\ 4 & , \ x = 1 \text{ ise} \\ -x+3 & , \ x > 1 \text{ ise} \end{cases}$

**ç.** $f(x)=\dfrac{x+2}{|x+2|}$

**d.** $f(x)=\dfrac{|2x-2|}{x-1}$

**8.** Aşağıdaki senaryolar, aralarındaki mesafe 180 km olan iki şehir arasındaki düz bir yolda seyahatinizi tanımlanmaktadır. Her bir senaryoya göre başlangıç noktasına uzaklığınızı (k kilometre) geçen zamana (t saat) göre gösteren $k(t)$ fonksiyonu hem sembolik olarak hem de grafik ile gösteriniz.

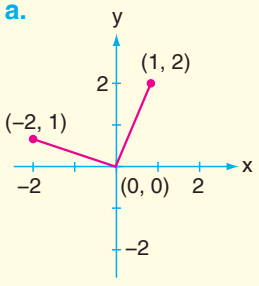
**a.** Bir saat 90 km/sa. hızla yol aldınız. Bir koyun sürüsü karşıdan karşıya geçerken yarım saat durdunuz. Sonra bir saat 90 km/sa. hızla giderek hedefinize ulaştınız.

**b.** Yarım saat 90 km/sa. hızla yol aldıktan sonra birden çantanızı evde bıraktığınızı hatırladınız. Çantanızı almak için 90 km/sa. hızla geri döndünüz. Sonra başlangıçtaki istikamette iki saat giderek hedefinize ulaştınız.

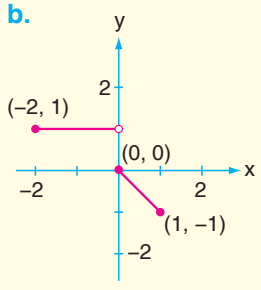
**c.** Yukarıdakilere benzer bir senaryoda siz yazınız. Senaryonuza uygun fonksiyonun kuralını oluşturup grafiğini çiziniz.

**9.** Aşağıda bazı parçalı fonksiyonların grafikleri verilmiştir. Bu fonksiyonları cebirsel olarak ifade ediniz.

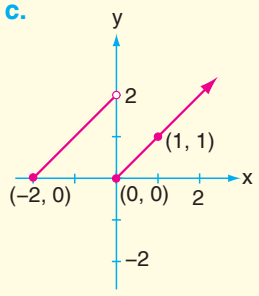
**a.**



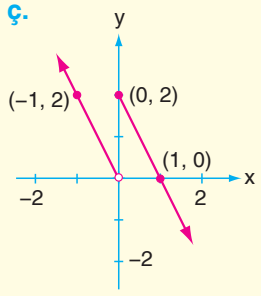

**b.**




**c.**




**ç.**



KONU 2.2

# İKİ FONKSİYONUN BİLEŞKESİ VE BİR FONKSİYONUN TERSİ

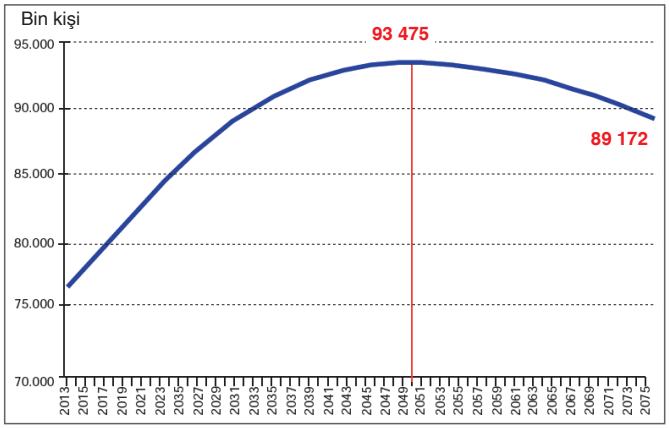
**Neler Öğreneceğiz?**

- Bir fonksiyonun bire bir ve örten olup olmadığını belirlemeyi
- Fonksiyonlarda bileşke işlemini
- Bir fonksiyonun tersini bulmayı

## Bire Bir ve Örten Fonksiyonlar

Günlük Hayat Bağlantısı

***Grafik:*** Türkiye Nüfusu, 2013 – 2075




*Genel ağdan alınmıştır.*

Yukarıdaki grafik TÜİK'in nüfus projeksiyonları çalışması kapsamında yayınlamış olduğu ve 2075 yılına kadar Türkiye'nin tahminî nüfusunu gösteren grafiktir.

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

**a.** Hangi yıllarda Türkiye nüfusunun 90 000 000 olması beklenmektedir?

**b.** Grafiğe göre farklı yıllarda Türkiye nüfusu aynı değeri alabilir mi?

**c.** Grafik $y = f(x)$ fonksiyonuna ait ise $f$ fonksiyonu bire bir midir? Neden?

*Grafiği verilen bir fonksiyonun değer kümesindeki noktalardan x eksenine paralel doğrular çizildiğinde;*

***Yatay Doğru Testi***

- *Çizilebilecek her doğru, fonksiyonun grafiğini kesiyorsa fonksiyon örtendir.*
- *En az bir doğru, fonksiyonun grafiğini kesmezse fonksiyon, içinedir.*
- *Çizilebilecek her doğru, fonksiyonun grafiğini en fazla bir noktada kesiyorsa fonksiyon bire birdir.*
- *En az bir doğru fonksiyonun grafiğini birden fazla noktada kesiyorsa fonksiyon bire bir değildir.*

## 1. Örnek

**Yanda grafikleri verilen f ve g fonksiyonlarının bire bir ve örten olma durumlarını inceleyelim.**

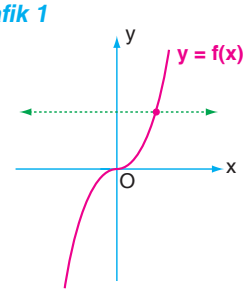
**a.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ **b.** $g: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

### Çözüm

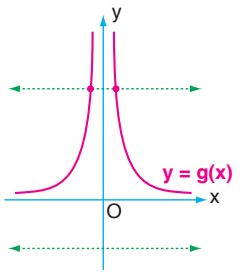
**a.** Değer kümesi $\mathbb{R}$'nin elemanlarından x eksenine paralel çizilen her doğru $f(x) = x^3$ eğrisini daima ve yalnız bir noktada keser. O hâlde f fonksiyonu bire bir ve örtendir (Grafik 1).

**b.** Değer kümesi $\mathbb{R}$'nin elemanlarından x eksenine paralel çizilen doğrulardan bazıları fonksiyonun grafiğini kesmez. O hâlde fonksiyon içinedir. x eksenine paralel çizilen doğrulardan bazıları ise fonksiyonun grafiğini birden fazla noktada keser. O hâlde fonksiyon bire bir değildir (Grafik 2).

*Grafik 1*




*Grafik 2*

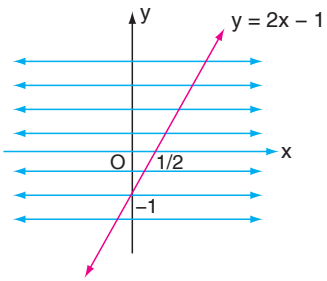



## 2. Örnek

**$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 2x - 1$'dir. f fonksiyonunun bire bir (1 – 1) ve örten olduğunu gösterelim.**

### Çözüm

- f fonksiyonunun grafiği yandaki gibidir.




Yanda görüldüğü gibi değer kümesi $\mathbb{R}$'nin elemanlarından x eksenine paralel çizilen her doğru fonksiyonun grafiğini yalnız bir noktada keser. O hâlde f fonksiyonu bire birdir. Bu durumu cebirsel olarak aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $f(x_1) = f(x_2)$ olsun.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ olur.}$$

Her $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ olduğundan f fonksiyonu bire birdir.

- Grafikte görüldüğü gibi değer kümesi $\mathbb{R}$'nin elemanlarından x eksenine paralel çizilen her doğru $y = f(x)$'in grafiğini daima keser, yani değer kümesinde eşlenmeyen eleman yoktur. O hâlde f fonksiyonu örtendir. Bu durumu cebirsel olarak aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$f(x) = y \Rightarrow 2x - 1 = y \Rightarrow x = \frac{y+1}{2} \text{ olur.}$$

Her $y \in \mathbb{R}$ için $x = \dfrac{y+1}{2} \in \mathbb{R}$'dir, yani y'ye verilen her gerçek sayı değeri için en az bir $x \in \mathbb{R}$ vardır.

## 3. Örnek

**$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonu**

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 , & x < 1 \text{ ise} \\ x , & x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$$

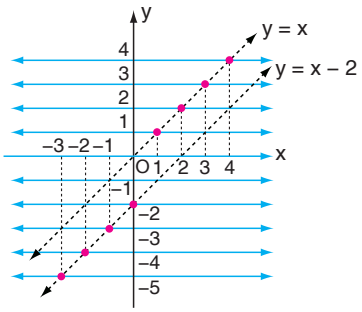
**biçiminde tanımlanıyor. Buna göre f fonksiyonunun;**

**a.** **Bire bir fonksiyon olduğunu gösterelim.**

**b.** **İçine fonksiyon olduğunu gösterelim.**

**c.** **Görüntü kümesini bulalım.**

### Çözüm




$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği (kırmızı noktalar) yandaki gibidir.

**a.** Fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{Z}$'nin elemanlarından x eksenine paralel çizilen her doğru yanda görüldüğü gibi fonksiyonun grafiğini en fazla bir noktada keser. O hâlde $y = f(x)$ bire bir $(1 - 1)$ fonksiyondur.

**b.** Yanda görüldüğü gibi $y = 0$ ve $y = -1$ doğruları fonksiyonun grafiğini kesmez, yani görüntü kümesinde 0 ve $-1$ oluşmaz. O hâlde değer kümesinde eşlenmeyen elemanlar olduğu için $y = f(x)$ içine fonksiyondur.

**c.** f fonksiyonunun değer kümesindeki eşlenmeyen elemanları 0 ve $-1$ olduğundan görüntü kümesi $\mathbb{Z} - \{-1, 0\}$'dır.

## 4. Örnek

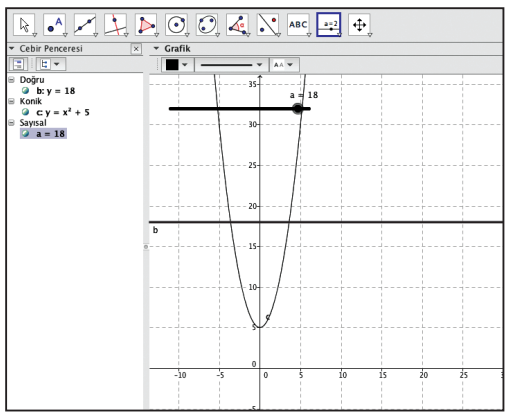
**$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5$ veriliyor. f fonksiyonunun bire bir $(1 - 1)$ olmadığını ve içine fonksiyon olduğunu dinamik geometri yazılımı kullanarak gösterelim.**

### Çözüm

Cebir penceresinin alt kısmında bulunan "Giriş" ekranına "y = x ^ 2 + 5" yazıp "Enter" tuşuna basarak fonksiyonun grafiğini çizelim.

"Giriş" ekranına "y = a" yazıp "Enter" tuşuna basalım. Ekrana gelen pencerede "Sürgüler Oluşturulsun mu?" butonuna basalım.

*Şekil 1*

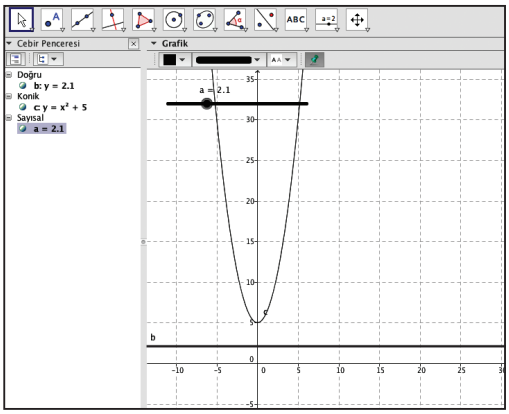



Sürgüyü sağa sola öteleyince bazı durumlarda $y = a$ doğrusunun fonksiyon grafiğini iki farklı noktada kestiğini (Şekil 1) görürüz.

O hâlde $f(x) = x^2 + 5$ fonksiyonu bire bir değildir.

Sürgüyü 5'ten küçük herhangi bir değere getirdiğimizde ise $y = a$ doğrusunun fonksiyonunun grafiğini kesmediğini (Şekil 2) görürüz, yani değer kümesinin 5'ten küçük değerleri f fonksiyonu ile herhangi bir değere eşlenmez. O hâlde $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 5$ fonksiyonu içine fonksiyondur.

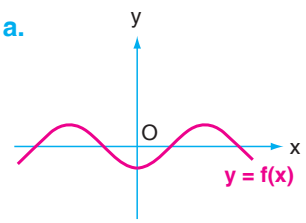
*Şekil 2*



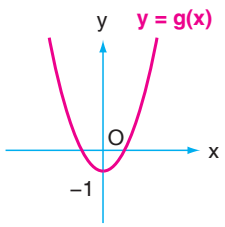

## 2.2.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g: \mathbb{R} \to [-1, +\infty),\ h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıda grafikleri verilen fonksiyonlardan hangilerinin tanımlı oldukları aralıklarda bire bir, örten veya içine olduklarını bulunuz.

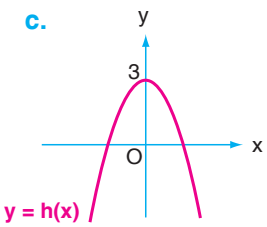
**a.**



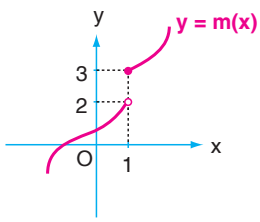

**b.**




**c.**




**ç.**




**2.** Verilen fonksiyonların bire bir veya örten olup olmadıklarını belirleyiniz.

**a.** $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = x$

**b.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$

**c.** $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = x^2$

**ç.** $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ f(x) = x^2$

**d.** $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = -3$

**e.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 4$

**f.** $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = 0$

**g.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 0$

**ğ.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 2$

**h.** $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x^3$

**ı.** $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ f(x) = 2x^2 + 1$

**i.** $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(x) = 2x^2 + 1$

## Fonksiyonlarda Bileşke İşlemi

Günlük Hayat Bağlantısı

Satış temsilcisi olan Sıla, yıllık 300 000 TL'nin üzerinde yapacağı satışlardan % 3 prim alacaktır.

Sıla, aşağıdaki fonksiyonu bir yılın sonunda alacağı primin kaç TL üzerinden hesaplanacağını bulmak için kullanıyor:

$$f(x) = x - 300\,000$$

Örneğin bir yılın sonunda Sıla 450 000 TL'lik satış yaptığında alacağı prim,

$$f(450\,000) = 450\,000 - 300\,000$$
$$= 150\,000 \text{ TL üzerinden hesaplanacaktır.}$$

Sıla'nın asıl öğrenmek istediği ise bu meblağda satış yaptığında kaç TL prim alacağıdır. Bunun için ise Sıla aşağıdaki fonksiyonu kullanıyor:

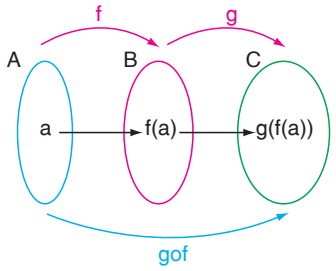
$$g(x) = 0{,}03 \cdot x$$

Buna göre prim 150 000 TL üzerinden hesaplanacağından Sıla'nın alacağı prim,

$$g(150\,000) = 0{,}03 \cdot 150\,000$$
$$= 4\,500 \text{ TL'dir.}$$

Dikkat ederseniz Sıla bir yıl boyunca yapacağı satıştan kazanacağı primi bulmak için iki ayrı fonksiyon kullandı. Birinci fonksiyon, Sıla'nın yaptığı toplam satıştan (TL) primin hesaplanacağı net satışı veren $f$ fonksiyonu, ikinci fonksiyon ise net satıştan (TL) alacağı primi veren $g$ fonksiyonudur.

Peki Sıla yıllık yaptığı toplam satıştan (TL), alacağı primi tek bir fonksiyon ile bulabilir miydi? Tartışınız.




*$f: A \to B$ ve $g: B \to C$ olmak üzere $A$ kümesinin elemanlarını $C$ kümesindeki elemanlarla eşleyen fonksiyona $f$ ile $g$ fonksiyonlarının bileşkesi denir. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) : A \to C$ şeklinde gösterilir.*

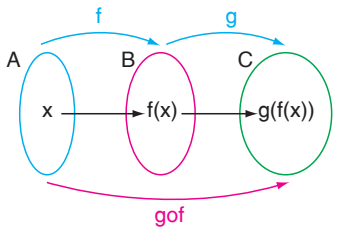
## 5. Örnek

**Konu girişindeki Sıla'nın alacağı prim ile ilgili probleme geri dönelim. Sıla'nın yaptığı bir yıllık toplam satıştan yıl sonunda alacağı primi veren tek bir fonksiyon bulalım.**

### Çözüm

$f(x) = x - 300\,000$

$g(x) = 0{,}03 \cdot x$ olmak üzere,




**x** : Bir yıl sonunda yapılan toplam satış (TL)

**f(x)** : Primin hesaplanacağı net satış (TL)

**g(f(x))** : Bir yıl sonunda satıştan alınacak prim (TL)

$$(gof)(x) = g(f(x))$$
$$= 0{,}03 \cdot (x - 300\,000)$$
$$= 0{,}03x - 9000 \text{ bulunur.}$$

Şimdi de bu fonksiyonu kullanarak bir yılda toplam 450 000 TL'lik satış yaptığında Sıla'nın alacağı primi bulalım:

$x = 450\,000$ TL için,

$$(gof)(450\,000) = 0{,}03 \cdot 450\,000 - 9000$$
$$= 13500 - 9000$$
$$= 4500 \text{ TL'dir.}$$

## 6. Örnek

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonları $f(x) = x^2 + 1$ ve $g(x) = x - 6$ şeklinde veriliyor. f ve g fonksiyonlarını birer fonksiyon makinesi ile modelleyelim.

**(gof)(3) değerini bulalım.**

### Çözüm

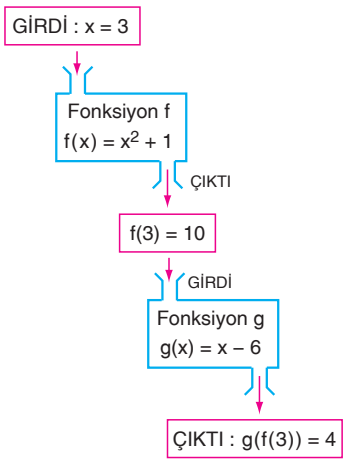
f fonksiyonunu, girdi olarak x değerini kabul eden, çıktı olarak f(x) değerini oluşturan bir makine olarak düşünelim. Buna göre f makinesi $x = 3$ girdi değeri için,

$f(3) = 3^2 + 1 = 10$ çıktı değerini verir.

g fonksiyonunu, girdi olarak f(x) değerini kabul eden, çıktı olarak g(f(x)) değerini oluşturan bir makine olarak düşünelim. Buna göre g makinesi $f(3) = 10$ girdi değeri için,

$$g(f(3)) = g(10) = 10 - 6$$
$$= 4 \text{ çıktı değerini verir.}$$

Bu durum yandaki gibi modellenebilir.



## 7. Örnek

**$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 1$ olmak üzere $(fog)(-2)$ değerini bulalım.**

**Çözüm**

**I. Yol**

Önce $fog$ fonksiyonunun kuralını bulalım:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = (x^2 + 1)^2 - (x^2 + 1)$$
$$= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 - 1$$
$$= x^4 + x^2$$

Şimdi de $(fog)(-2)$ değerini bulalım:

$$(fog)(-2) = (-2)^4 + (-2)^2$$
$$= 16 + 4 = 20 \text{ bulunur.}$$

**II. Yol**

Çözümü, $fog$ fonksiyonunun kuralını bulmadan yapalım:

$f(x) = x^2 - x$ ve $g(x) = x^2 + 1$ ise,

$$(fog)(-2) = f(g(-2)) = f((-2)^2 + 1)$$
$$= f(5)$$
$$= 5^2 - 5 = 20 \text{ bulunur.}$$

## 8. Örnek

**$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - 1$ veriliyor. $fog$ ve $gof$ fonksiyonlarının kurallarını bulalım.**

**Çözüm**

$$\mathbf{(fog)(x)} = f[g(x)] = f(x-1) = (x-1)^2 - 1 = \mathbf{x^2 - 2x}$$

$$\mathbf{(gof)(x)} = g[f(x)] = g(x^2 - 1) = (x^2 - 1) - 1 = \mathbf{x^2 - 2}$$

Görüldüğü gibi $(fog)(x) \neq (gof)(x)$'tir.

*Fonksiyonlarda bileşke işleminin değişme özelliği yoktur.*

*$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için genel olarak $(fog)(x) \neq (gof)(x)$'tir.*

## 9. Örnek

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ veriliyor.

**Buna göre f, g, fog ve gof fonksiyonlarının aralarındaki ilişkiyi grafiksel olarak açıklayalım.**

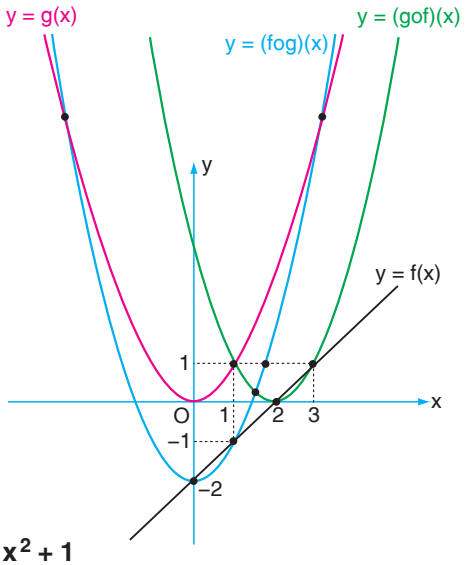
**Çözüm**

$(fog)(x) = f(g(x)) = g(x) - 2 = x^2 - 2$,

$(gof)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = (x - 2)^2$ dir.

Yanda f, g, fog ve gof fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

f ile g fonksiyonlarının kesiştikleri noktalar yokken, f ve g'nin gof ve fog fonksiyonları ile kesiştiğine dikkat ediniz.




## 10. Örnek

**$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - 3$ ve $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 + 1$ veriliyor. (fog)oh ve fo(goh) fonksiyonlarının kurallarını bulalım.**

**Çözüm**

$\mathbf{[(fog)oh](x)} = (fog) \circ h(x)$

$= [f(g(x))] \circ h(x)$

$= f(x - 3) \circ h(x)$

$= 2(x - 3) \circ (x^2 + 1)$

$= 2(x^2 + 1 - 3)$

$= 2(x^2 - 2) = \mathbf{2x^2 - 4}$

$\mathbf{[fo(goh)](x)} = f[(goh)(x)]$

$= f[g(h(x))]$

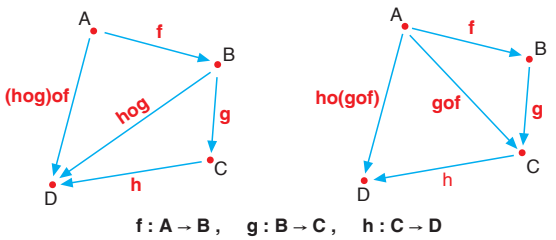
$= f[g(x^2 + 1)]$

$= f[(x^2 + 1) - 3]$

$= f(x^2 - 2)$

$= 2(x^2 - 2) = \mathbf{2x^2 - 4}$

Fonksiyonlarda bileşke işleminin birleşme özelliğinin olduğu yandaki şemalarla gösterilebilir.




$f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$

*Fonksiyonlarda bileşke işleminin birleşme özelliği vardır.*

*$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere f, g ve h fonksiyonları için $fo(goh) = (fog)oh$'dir.*

***Birleşme Özelliği***

**11. Örnek**

**$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$ ve $fog: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(fog)(x) = 6x - 10$ olduğuna göre $g(x)$ fonksiyonunun kuralını bulalım.**

**Çözüm**

$(fog)(x) = f(g(x)) = 6x - 10$ ise,

$3g(x) - 1 = 6x - 10$ *[$f(x) = 3x - 1$'de $x$ yerine $g(x)$ yazıldı.]*

$3g(x) = 6x - 9$

$g(x) = 2x - 3$ olur.

**12. Örnek**

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 4$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 7$ ve $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 3x$ veriliyor.

**Buna göre $(fohog)(-3)$ ifadesinin eşitini bulalım.**

**Çözüm**

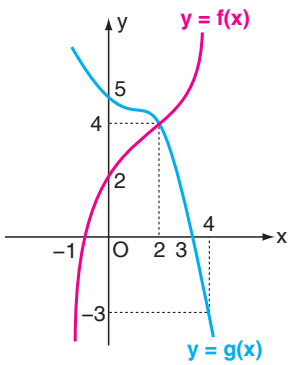
$(fohog)(-3) = (foh) \circ (g(-3))$

$= (foh)(2)$ *[$g(-3) = (-3)^2 - 7 = 2$'dir.]*

$= f(6)$ *[$h(2) = 3.2 = 6$'dır.]*

$= 6 - 4 = 2$ bulunur.

**13. Örnek**




Yanda $f$ ve $g$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

**Buna göre aşağıda istenen değerleri bulalım.**

**a.** $(gof)(-1)$ **b.** $(gofof)(0)$

**Çözüm**

Grafikte $f$ fonksiyonu için $f(-1) = 0$, $f(0) = 2$, $f(2) = 4$;

$g$ fonksiyonu için $g(0) = 5$, $g(2) = 4$, $g(3) = 0$ ve $g(4) = -3$'tür.

Buna göre;

**a.** $(gof)(-1) = g(\underbrace{f(-1)}_{0})$

$= g(0)$

$= 5$'tir.

**b.** $(gofof)(0) = g(f(\underbrace{f(0)}_{2}))$

$= g(\underbrace{f(2)}_{4})$

$= g(4)$

$= -3$'tür.

## 2.2.2 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonları $f(x) = x + 4$ ve $g(x) = 2x - 3$ şeklinde veriliyor.

Buna göre aşağıda verilen fonksiyonların kurallarını bulunuz.

**a.** fog **b.** gof **c.** fof **ç.** gog

**2.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$ ve $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x - 2$ veriliyor.

Buna göre aşağıda verilen fonksiyonların kurallarını bulunuz.

**a.** $(fog)oh$ **b.** $(hof)og$ **c.** $(gof)oh$ **ç.** $(foh)og$

**3.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = 3x - 2$ ve $(fog)(x) = 12x + 13$ veriliyor.

Buna göre aşağıdaki ifadelerin eşitini bulunuz.

**a.** $f(2)$ **b.** $(fog)(3)$ **c.** $g(x)$

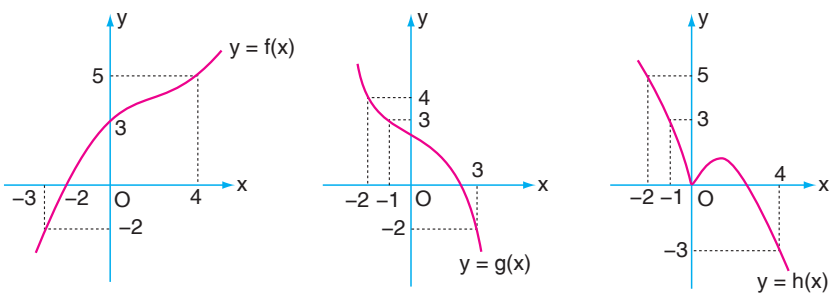
**ç.** $(gof)(x)$ **d.** $(gog)(2)$ **e.** $(fogof)(2)$

**4.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 1$ ve $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 2x - 1$ veriliyor.

Buna göre aşağıdaki ifadelerin eşitini bulunuz.

**a.** $(fohog)(x)$ **b.** $(fogoh)(-1)$ **c.** $(gofoh)(0)$

**5.**




Yukarıda f, g ve h fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre aşağıdaki ifadelerin eşitini bulunuz.

**a.** $(fog)(-2)$ **b.** $(goh)(-1)$ **c.** $(fogoh)(-1)$ **ç.** $(hogof)(0)$

## Ters Fonksiyonlar

### 14. Örnek

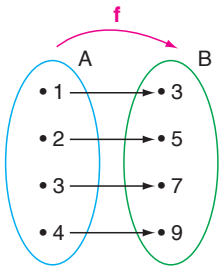
$A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{3, 5, 7, 9\}$ kümeleri üzerinde tanımlı $f: A \to B$ fonksiyonu $f(x) = 2x + 1$ ve $g: B \to A$ fonksiyonu $g(x) = \dfrac{x-1}{2}$ şeklinde tanımlanıyor.

**Buna göre f ve g fonksiyonlarının tanım ve görüntü kümeleri arasında nasıl bir ilişki olduğunu ve fog fonksiyonunun kuralını bulalım.**

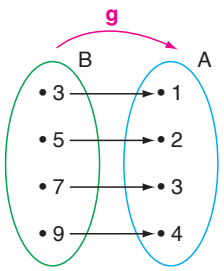
**Çözüm**

f ve g fonksiyonlarının şema ile gösterimini "Şekil 1" ve "Şekil 2"de inceleyelim. Buna göre f ve g fonksiyonları bire bir ve örten fonksiyonlardır. Şimdi de fog'yi bulalım.

*Şekil 1*




*Şekil 2*




$fog : B \to B$ olmak üzere,

$x = \mathbf{3}$ için $(fog)(3) = f(g(3)) = f(1) = \mathbf{3}$

$x = \mathbf{5}$ için $(fog)(5) = f(g(5)) = f(2) = \mathbf{5}$

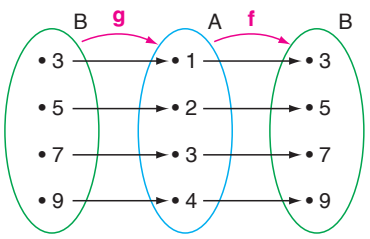
$x = \mathbf{7}$ için $(fog)(7) = f(g(7)) = f(3) = \mathbf{7}$

$x = \mathbf{9}$ için $(fog)(9) = f(g(9)) = f(4) = \mathbf{9}$

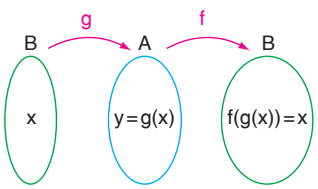
olup fog fonksiyonunun tanım kümesindeki her elemanın görüntüsü kendisine eşit olduğundan birim fonksiyondur (Şekil 3).

Buna göre $(fog)(x) = x$ birim fonksiyondur.

*Şekil 3*



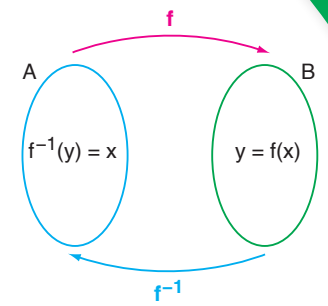

fog : Birim Fonksiyon

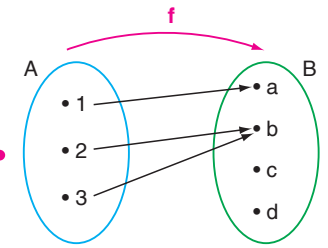



- *Bire bir ve örten iki fonksiyonun bileşkesi birim fonksiyona eşitse bu fonksiyonlar birbirinin tersidir.*
- *$f: A \to B$, $g: B \to A$ olmak üzere $fog = I$ ise g fonksiyonuna f fonksiyonunun bileşke işlemine göre tersi denir.*

*$g(x) = f^{-1}(x)$ olarak tanımlanır.*

- *f fonksiyonu, A'dan B'ye bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere,* $y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$*'tir.*
- *Bir fonksiyonun tersinin de fonksiyon olabilmesi için bire bir ve örten olması gerekir.*




*f:{(1, a), (2, b), (3, b)} ilişkisi bir fonksiyon iken,*
$f^{-1}$*: {(a, 1), (b, 2), (b, 3)} ilişkisi bir fonksiyon değildir.*

### 15. Örnek

$A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ve $B = \{-2, 1, 4, 7\}$ olmak üzere $f: A \to B$ fonksiyonu $f(x) = 3x + 1$ şeklinde tanımlanıyor.

**Buna göre f ve $f^{-1}$ fonksiyonlarını liste biçiminde yazalım.**

**Çözüm**

$f(x) = 3x + 1$ olup,

$f(-1) = 3\cdot(-1) + 1 = -2$

$f(0) = 3\cdot 0 + 1 = 1$

$f(1) = 3\cdot 1 + 1 = 4$

$f(2) = 3\cdot 2 + 1 = 7$

$f = \{(-1, -2), (0, 1), (1, 4), (2, 7)\}$ ve

$f^{-1} = \{(-2, -1), (1, 0), (4, 1), (7, 2)\}$ elde edilir.

*f: A → B, bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere,*
*I: A → A birim fonksiyon ise,*

- $foI = Iof = f$
- $fof^{-1} = I$*'dır.*
- $f^{-1}of = I$*'dır.*

### 16. Örnek

**$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = 4x - 3$ şeklinde tanımlanıyor. f fonksiyonunun tersinin kuralını bulalım.**

**Çözüm**

$f(x) = 4x - 3$ veya $y = 4x - 3$ eşitliğinden x'i çekerek f fonksiyonunun tersini, yani $f^{-1}(x)$'i buluruz. Buna göre,

$y = 4x - 3 \Rightarrow 4x = y + 3$

$$x = \frac{y+3}{4}$$

Şimdi y yerine x, x yerine y yazalım.

Bu durumda $y = \frac{x+3}{4}$ olup $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{4}$'tür.

*$a \neq 0$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ bire bir ve örten fonksiyon ise,*

$f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$*'dır.*

**17. Örnek**

**$f(x) = \dfrac{x-5}{2x+3}$ olmak üzere f fonksiyonu tanımlı olduğu yerlerde bire bir ve örtendir. Buna göre f fonksiyonunun tersinin kuralını bulalım.**

**Çözüm**

$y = \dfrac{x-5}{2x+3}$ eşitliğinden x'i çekelim:

$y(2x+3) = x - 5 \Rightarrow 2xy + 3y = x - 5$

$2xy - x = -3y - 5$

$x(2y-1) = -(3y+5)$

$x = -\dfrac{3y+5}{2y-1}$

Şimdi y yerine x, x yerine y yazalım.

Buna göre $y = -\dfrac{3x+5}{2x-1}$ olup $f^{-1}(x) = -\dfrac{3x+5}{2x-1}$ elde edilir.

- *$f: \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$, $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ olsun. f fonksiyonu bire bir ve örten fonksiyon olmak üzere $f^{-1}(x) = \dfrac{-dx+b}{cx-a}$'dır.*

- *Tanımlı olduğu yerlerde bire bir ve örten bir f fonksiyonu için,*

  *$(f^{-1})^{-1} = f$'dir.*

**18. Örnek**

**$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 3$ veriliyor.**

**$(fog)^{-1}$ ve $(g^{-1}of^{-1})$ fonksiyonlarının kurallarını bulup karşılaştıralım.**

**Çözüm**

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x+3)$

$= 2 \cdot (x+3) + 1$

$= 2x + 7$ olur.

$(fog)(x) = 2x + 7$ fonksiyonunun tersi $(fog)^{-1}(x) = \frac{x-7}{2}$ **...(I)**'dir.

Şimdi $f^{-1}$ ve $g^{-1}$ fonksiyonlarını bularak $(g^{-1}of^{-1})$ fonksiyonunu elde edelim.

$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ ve $g(x) = x + 3 \Rightarrow g^{-1}(x) = x - 3$'tür.

$$\left(g^{-1} of^{-1}\right)(x) = g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right) = g^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{x-1}{2}\right) - 3 = \frac{x-7}{2} \text{ ...(II)'dir.}$$

**I** ve **II**'den $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$ olduğuna dikkat ediniz.

*$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlanan bire bir ve örten fonksiyonlar için,*

*$(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$ dir.*

**19. Örnek**

**$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(2x + 5) = 3x - 8$ ise $f(x)$ fonksiyonunun kuralını bulalım.**

**Çözüm**

$g(x) = 2x + 5$ olmak üzere $f(2x + 5) = 3x - 8$ fonksiyonunda x yerine $g^{-1}(x)$ i yazalım.

$g(x) = 2x + 5 \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$'dir.

Buna göre,

$f(2 . g^{-1}(x) + 5) = 3 \cdot g^{-1}(x) - 8$

$$f\left(2 \cdot \frac{x-5}{2} + 5\right) = 3 \cdot \frac{x-5}{2} - 8$$

*[$f(2x + 5) = 3x - 8$'de x yerine $2x + 5$'in tersi olan $\frac{x-5}{2}$ yazıldı.]*

$$f(x - 5 + 5) = \frac{3x-15}{2} - 8$$

$$f(x) = \frac{3x-31}{2} \text{ elde edilir.}$$

*Uygun koşullarda tanımlı f, g ve h fonksiyonları verilsin.*

*$f(g(x)) = h(x)$ eşitliğinden $f(x)$ fonksiyonunu elde etmek için verilen eşitlikte x yerine $g^{-1}(x)$ yazılır. Diğer bir deyişle,*

*$(fog)(x) = h(x)$ ise $f(x) = (hog^{-1})(x)$ tir.*

**20. Örnek**

**$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(3x+2) = 4x+5$ ise $f(5)$ değerini bulalım.**

**Çözüm**

**I. Yol**

$f(3x+2)$ fonksiyonunda $x$ yerine $\frac{x-2}{3}$ yazılırsa $f(x)$ elde edilir.

$f\left(3\cdot\left(\frac{x-2}{3}\right)+2\right) = 4\cdot\left(\frac{x-2}{3}\right)+5$ *[$f(3x+2) = 4x+5$ te $x$ yerine $3x+2$'nin tersi olan $\frac{x-2}{3}$ yazıldı.]*

$f(x-2+2) = \frac{4x-8}{3}+5$

$f(x) = \frac{4x+7}{3}$'tür.

Buna göre $f(5) = \frac{4\cdot 5+7}{3} = 9$ bulunur.

**II. Yol**

$f(3x+2)$ fonksiyonundan $f(5)$ değerini bulmak için $3x+2$ ifadesini 5'e eşitleyen $x$ değeri bulunur.

$3x+2 = 5 \Rightarrow 3x = 3$

$x = 1$ dir.

Buna göre $f(3x+2)$ fonksiyonunda $x$ yerine $1$ yazıldığında;

$f(3x+2) = 4x+5$

$f(3\cdot 1+2) = 4\cdot 1+5$

$f(5) = 9$ elde edilir.

---

*$f$, $g$ ve $h$ gerçek sayılarda tanımlı fonksiyonlar olsun.*

*$f[g(x)] = h(x)$ eşitliğinde $f(x)$ fonksiyonunu bulmadan $f(a)$ değerini bulmak için $g(x) = a$ eşitliğini sağlayan $x$ değeri $f[g(x)] = h(x)$ eşitliğinde yerine yazılır.*

**21. Örnek**

**$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(3x-4) = 4x+2$ ise $f^{-1}(3)$ değerini bulalım.**

**Çözüm**

$y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$'tir. Buna göre,

$f(3x-4) = 4x+2 \Rightarrow f^{-1}(4x+2) = 3x-4$'tür.

$4x+2 = 3 \Rightarrow 4x = 1$

$\Rightarrow x = \frac{1}{4}$'tür.

$f^{-1}(4x+2) = 3x-4$ eşitliğinde $x$ yerine $\frac{1}{4}$ yazalım.

$f^{-1}\left(4\cdot\frac{1}{4}+2\right) = 3\cdot\frac{1}{4}-4 \Rightarrow f^{-1}(3) = -\frac{13}{4}$ bulunur.

## 22. Örnek

**$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için $g(x) = 2x + 1$ ve $(fog)(x) = 4x - 5$ ise $f$ fonksiyonunun kuralını bulalım.**

**Çözüm**

$(fog)(x) = 4x - 5 \Rightarrow f[g(x)] = 4x - 5$

$\Rightarrow f(2x + 1) = 4x - 5$'tir.

$x$ yerine $2x + 1$'in tersini yazalım:

$$f\left(2 \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right) + 1\right) = 4 \cdot \left(\frac{x-1}{2}\right) - 5$$

$f(x) = 2x - 7$ bulunur.

## Bir Fonksiyonun Tersinin Grafiği

## 23. Örnek

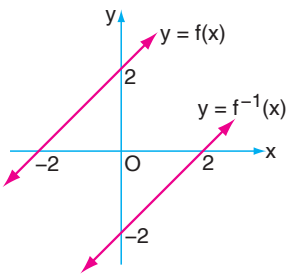
**$f(x) = x + 2$ olmak üzere $f$ ve $f^{-1}$ fonksiyonlarının grafiğini çizelim.**

**Çözüm**

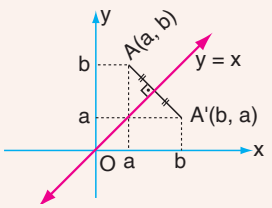
$f(x) = x + 2$ fonksiyonunun tersi

$f^{-1}(x) = x - 2$'dir.

Buna göre $f$ ve $f^{-1}$ fonksiyonlarının grafiği yandaki gibidir.




**UYARI**



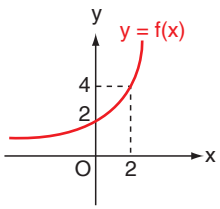

$A'(b, a)$ noktası, $A(a, b)$ noktasının $y = x$ doğrusuna göre simetriğidir.

*Bir fonksiyon ile fonksiyonun tersinin grafiği $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.*

## 24. Örnek

**"Şekil 1" de grafiği verilen $f$ fonksiyonunun tersinin grafiğini çizelim.**

*Şekil 1*

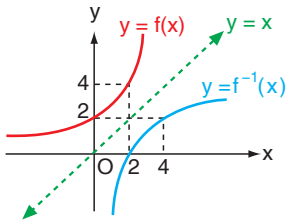


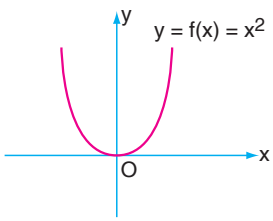

**Çözüm**

$f$ fonksiyonunun $y = x$ doğrusuna göre simetriğini çizersek $f^{-1}$ fonksiyonunun grafiğini çizmiş oluruz.

"Şekil 2" de $f$ ve $f^{-1}$ fonksiyonlarının grafikleri aynı analitik düzlemde verilmiştir.

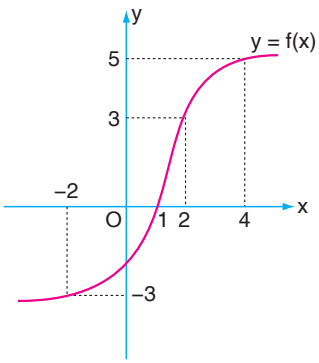
*Şekil 2*






## 2.2.1 Kritik Düşünme

Yanda verilen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunun grafiğinin $y = x$'e göre simetriğini çiziniz. Çizdiğiniz grafik $f$'nin ters fonksiyonunun grafiği midir? Neden?




### 25. Örnek

**$y = f(x)$ fonksiyonunun yanda verilen grafiğine göre aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulalım.**

**a.** $f(4)$ **b.** $f^{-1}(5)$ **c.** $f^{-1}(-3)$

**Çözüm**

**a.** $y = f(x)$'in grafiğine göre $x = 4$ için $y = 5$ olduğundan $f(4) = 5$'tir.

**b.** $f$'nin grafiğine göre $x = 4$ için $y = 5$'tir.
$y = f(x)$ bire bir ve örten olduğuna göre $f^{-1}(y) = x$'tir.
Buna göre $f^{-1}(5) = 4$'tür.

**c.** $f^{-1}(-3)$'ün değeri için grafik üzerinde ordinatı $-3$ olan noktanın apsisini bulmamız gerekir.
Buna göre $f^{-1}(-3) = -2$'dir.

## 2.2.3 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ve $B = \{-6, -3, 0, 3, 6\}$ kümeleri ile $f: A \to B$, $f(x) = 3x$ fonksiyonu veriliyor.

Buna göre $f$ ve $f^{-1}$ fonksiyonlarını liste biçiminde yazınız.

**2.** Aşağıda verilen gerçek sayılar kümesinde tanımlı fonksiyonların tersini bulunuz.

**a.** $f(x) = 2x$ **b.** $g(x) = 5x - 3$ **c.** $h(x) = \dfrac{2x+4}{3}$

**3.** Aşağıda tanım ve görüntü kümeleri ile birlikte verilen fonksiyonların tersini bulunuz.

**a.** $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{3\}$ ; $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$

**b.** $g: \mathbb{R} - \{-3\} \to \mathbb{R} - \{-2\}$ ; $g(x) = \dfrac{-2x}{x+3}$

**c.** $f: \mathbb{R} - \left\{\dfrac{5}{2}\right\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ ; $h(x) = \dfrac{3}{2x-5}$

**4.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - 2$ olmak üzere aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulunuz.

**a.** $(fog)^{-1}$ **b.** $(gof)^{-1}$ **c.** $fog^{-1}$ **ç.** $gof^{-1}$

**5.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(2x + 3) = 6x - 4$ ise aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulunuz.

**a.** $f(2)$ **b.** $f(x)$ **c.** $f^{-1}(-5)$ **ç.** $f^{-1}(x)$

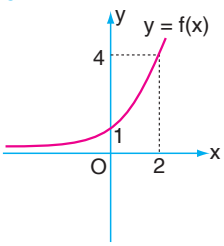
**6.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 3x + 2$ ve $(fog)(x) = 6x + 10$ olmak üzere aşağıdaki fonksiyonların kurallarını bulunuz.

**a.** $g(x)$ **b.** $(gof)(x)$ **c.** $(g^{-1}of)(x)$

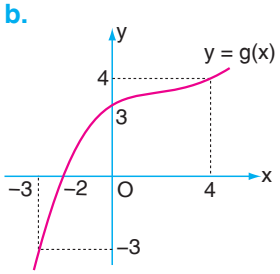
**7.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g(x) = 4x - 3$ ve $(fog)(x) = 2x + 1$ olmak üzere aşağıdaki fonksiyonların eşitlerini bulunuz.

**a.** $f(x)$ **b.** $(g^{-1}of)(x)$ **c.** $(f^{-1}og)(x)$

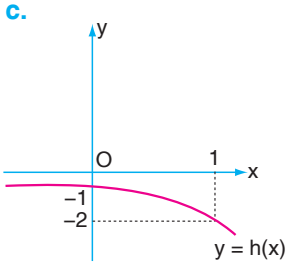
**8.** **a.**




**b.**

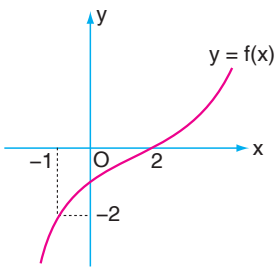


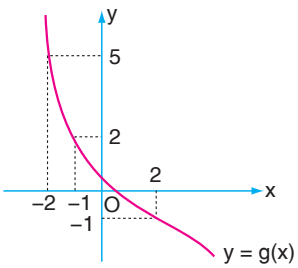

**c.**




Yukarıda grafikleri verilen fonksiyonların tersinin grafiğini çiziniz.

**9.**




f ve g fonksiyonlarının yukarıdaki grafiklerine göre aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulunuz.

**a.** $f^{-1}(0)$ **b.** $g^{-1}(2)$ **c.** $(gof^{-1})(-2)$

**ç.** $(fog^{-1})(-1)$ **d.** $(fog)^{-1}(-2)$ **e.** $(gofog)(2)$

# 2.2 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI

**1.** Aşağıdaki fonksiyonların bire bir veya örten olup olmadıklarını belirleyiniz.

**a.** $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1$

**b.** $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ g(x) = x^2 + 1$

**c.** $h: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ h(x) = x^2 + 1$

**2.** Gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonları için $(fog)(x) = (gof)(x)$ olduğuna göre f ve g fonksiyonları arasında nasıl bir ilişki olabilir? Açıklayınız?

**3.** ***Tablo:*** f, g ve fog Fonksiyonları

| f(x) | g(x) | (fog)(x) |
|---|---|---|
| $x^2$ | $x - 1$ | |
| | $2x + 1$ | $2x^2 + 3$ |
| | $\frac{x-2}{x}$ | $\frac{x}{x+2}$ |
| $\sqrt{x}$ | $x^2$ | |

Yukarıda f, g ve fog fonksiyonları tablo şeklinde verilmiştir.

Buna göre tabloda eksik olan kısımları tamamlayınız.

**4.** Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f, g ve h fonksiyonları için $(foh)(x) = x - 3$ ve $(hog)(x) = 2x + 1$ veriliyor.

Buna göre $f(3) - g(1)$ ifadesinin eşiti kaçtır?

**5.** Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f çift fonksiyon ve g tek fonksiyon olduğuna göre aşağıda verilen fonksiyonlardan çift, tek ve ne tek ne de çift fonksiyon olanları belirleyiniz.

**a.** fof **b.** gog **c.** fog **ç.** gof

**6.** ***Tablo:*** $f^{-1}$ in Tanım ve Görüntü Kümeleri

| f | $f^{-1}$ | $f^{-1}$ in Tanım ve Görüntü Kümeleri |
|---|---|---|
| x | | |
| $2x + 3$ | | |
| $\frac{3x+4}{2}$ | | |
| $\frac{3}{2x+5}$ | | |
| $\frac{3x+2}{2x+1}$ | | |

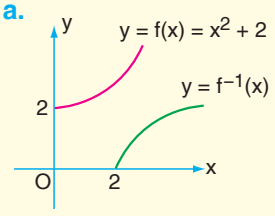
Yukarıda verilen bazı fonksiyonların tanımlı oldukları en geniş aralıklarda fonksiyonların tersini, ters fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bularak tabloyu doldurunuz.

**7.** $f: \mathbb{R} - \{a\} \to \mathbb{R} - \{b\}$ ve $f(x) = \frac{4x-5}{2x-6}$ olmak üzere $a + b$ değerini bulunuz.

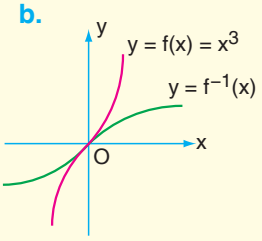
**8.** Aşağıda $y = f(x)$ fonksiyonlarının kuralı, f ve $f^{-1}$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre $f^{-1}$ fonksiyonlarının kurallarını bulunuz.

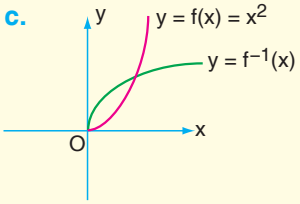
**a.**




**b.**




**c.**



# 2. ALT ÖĞRENME ALANI TESTİ

**1.** $f: A \to [-7, 1)$ fonksiyonu için,

$f(x) = -2x + 3$

**olduğuna göre A kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(-1, 4]$ B) $(1, 5]$ C) $(1, 5)$
D) $(4, 5]$ E) $[5, 7)$

**2.** $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4 & , \ x \geq 2 \text{ ise} \\ x + 3 & , \ x < 2 \text{ ise} \end{cases}$

**olduğuna göre $f(2) - f(-1)$ kaçtır?**

A) $-2$ B) 0 C) 2 D) 4 E) 6

**3.** Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f fonksiyonu,

$f(x) = mx^3 + n$

biçiminde tanımlanıyor.

**$f(1) = 4$ ve $f(0) = 2$ olduğuna göre $f(2)$ kaçtır?**

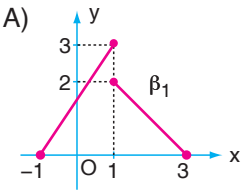
A) 12 B) 16 C) 18 D) 24 E) 32

**4.** **Köşegen uzunluğu x br olan bir karenin çevresinin x'e bağlı fonksiyonu, Ç(x) olduğuna göre $Ç(2\sqrt{2})$ kaçtır?**

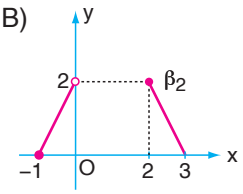
A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 4 D) $4\sqrt{2}$ E) 8

**5.** **Aşağıda grafikleri verilen matematiksel ilişkilerden hangisi $[-1, 3] \to [-1, 3]$ tanımlı bir fonksiyon belirtir?**

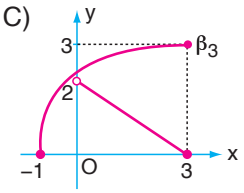
A)



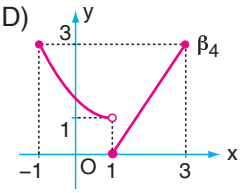

B)



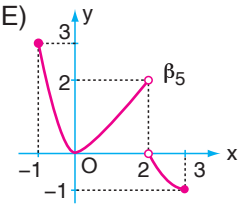

C)




D)

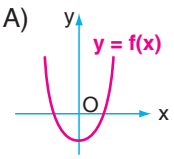



E)



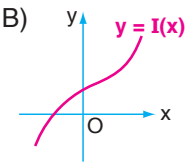

**6.** **Aşağıdaki fonksiyonlardan hangisi, tanımlı olduğu aralıkta örten bir fonksiyondur?**

A)



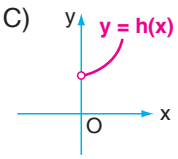

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

B)



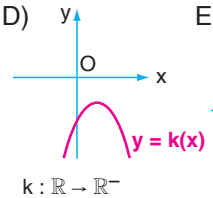

$I: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

C)



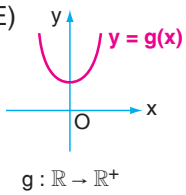

$h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

D)




$k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^-$

E)




$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

**7.** **Aşağıdakilerden hangisi bir fonksiyon belirtir?**

A) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \ f(x) = \dfrac{x+3}{2-x}$

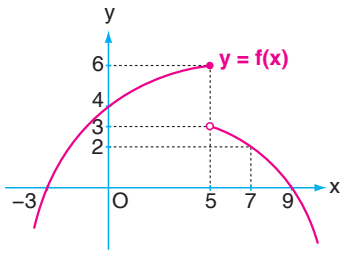
B) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \ f(x) = \dfrac{2}{x+1}$

C) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \ f(x) = -x - 1$

D) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \ f(x) = 3x - 5$

E) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}, \ f(x) = \sqrt{5+x}$

**8.**




Yanda, f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

**f(a) = 1 ve f(b) = 5 olduğuna göre a + b aşağıdakilerden hangisine eşit olamaz?**

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

**9.** Gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonu,

$f(x) = (a - 2b)x^2 + (b - 2)x + a + b - 4$

şeklinde veriliyor.

**f sabit fonksiyon olduğuna göre f(1) kaçtır?**

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

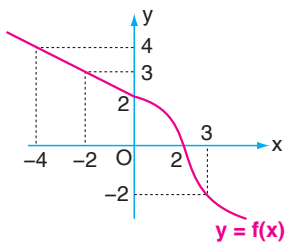
**10.** Gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonu için,

$f(x) = (2 + 5m)x + 1 - 5k$ veriliyor.

**f birim fonksiyon olduğuna göre m – k değeri kaçtır?**

A) –1 B) $-\frac{4}{5}$ C) $-\frac{3}{5}$ D) $-\frac{2}{5}$ E) 0

**11.**

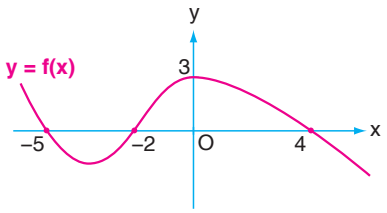



Yanda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

**Buna göre** $\frac{f(-4)+f(2)}{f(-2)+f(3)}$ **kaçtır?**

A) –4 B) –2 C) 0 D) 2 E) 4

**12.**




**Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonuna göre aşağıdakilerden hangisi veya hangileri doğrudur?**

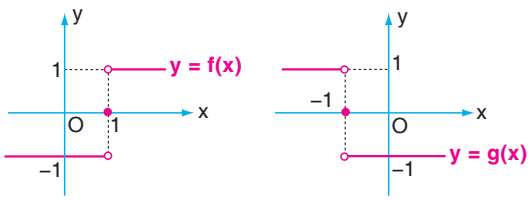
I. f(a) = 0 eşitliğini sağalayan 4 tane a değeri vardır.

II. f(–3)·f(2) > 0'dır.

III. f[f(4)] = 3'tür.

A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve II
D) II ve III E) I, II ve III

**13.**



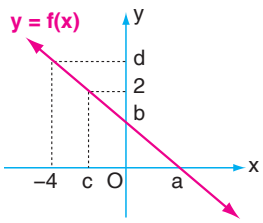

Yukarıda f ve g fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre,

$f[g(-7)] + f[g(-6)] + ... + f[g(7)]$

**toplamının değeri kaçtır?**

A) 14 B) 7 C) 0 D) –9 E) –11

**14.**

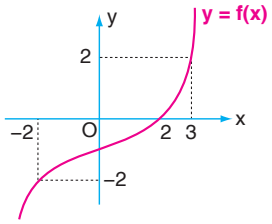



Yanda kuralı $f(x) = \frac{2-x}{2}$ olan f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

**Buna göre a + b + c + d değeri kaçtır?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**15.**

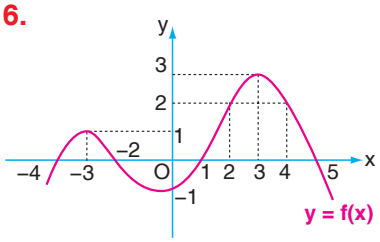



Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

**$f(a) = -2$ ve $f(b) = 2$ olduğuna göre $a + b$ kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**16.**



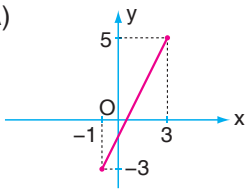

Yanda gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

**Buna göre $f(x) = 0$ denklemini sağlayan kaç farklı x değeri vardır?**

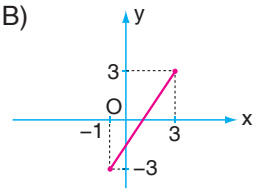
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

**17.** $A = [-1, 3]$ ve $f: A \to \mathbb{R}$ olmak üzere **$f(x) = 2x - 3$ veriliyor. f fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisidir?**

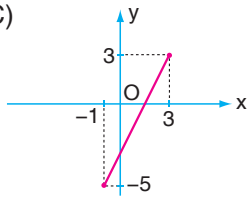
A)



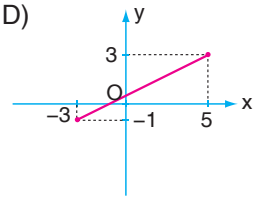

B)



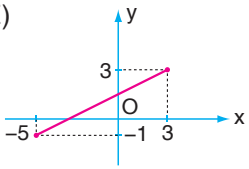

C)




D)



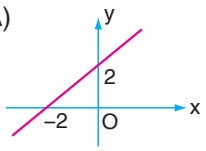

E)



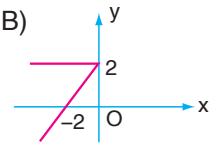

**18.** $f(x) = \begin{cases} 2 & , \ x \geq 0 \text{ ise} \\ x+2 & , \ x < 0 \text{ ise} \end{cases}$

**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

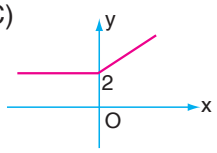
A)



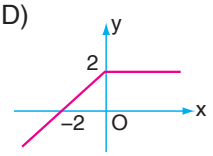

B)



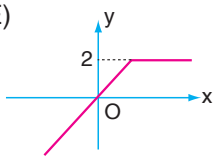

C)




D)



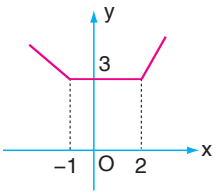

E)



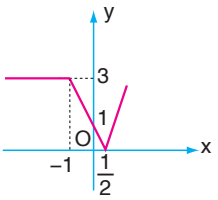

**19.** $f(x) = |x - 2| + |x + 1|$

**fonksiyonunun grafiği aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

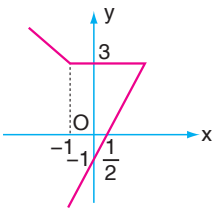
A)



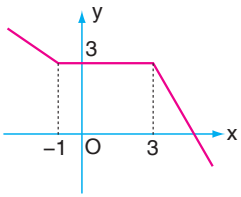

B)



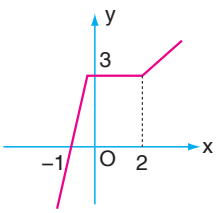

C)




D)




E)



**20.** $f(x) = 2x^4 + (a-3)x^3 + x^2 + (b+3)x$ veriliyor.

**f fonksiyonu çift fonksiyon olduğuna göre a.b değeri kaçtır?**

A) 9 B) 6 C) 0 D) −6 E) −9

**21.** **Aşağıdakilerden hangisi çift fonksiyondur?**

A) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + x$

B) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x-1| + 2$

C) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x| - 3$

D) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x \cdot |x| + 2$

E) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{x^3+2x}{x^2+1}$

**22.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f çift fonksiyon ve g tek fonksiyon olmak üzere aşağıdakilerden hangisi **kesinlikle doğrudur?**

A) fof tek fonksiyon B) fog çift fonksiyon

C) gof tek fonksiyon D) f + g çift fonksiyon

E) f − g tek fonksiyon

**23.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$ ve $g(x) = x^2 - 1$ **olduğuna göre (f.g)(2) kaçtır?**

A) 3 B) 5 C) 8 D) 12 E) 15

**24.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyon olmak üzere, $(fof)(x) = 9x - 8$ olduğuna göre **f(x) fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisi olabilir?**

A) 3x + 2 B) 3x − 2 C) −3x + 2

D) 3x − 4 E) 3x + 4

**25.** Uygun koşullarda tanımlı f ve g fonksiyonları için,

$$(gof)(x) = \frac{2f(x)+3}{3-4f(x)}$$

**olduğuna göre $g^{-1}(x)$ fonksiyonunun kuralı aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\dfrac{2x+3}{3-4x}$ B) $\dfrac{3x-3}{2x-4}$ C) $\dfrac{4x+3}{3-2x}$

D) $\dfrac{3x-3}{4x+2}$ E) $\dfrac{4x+3}{3x-2}$

**26.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlanan iki fonksiyon olmak üzere,

$f(x) = 2x - 3$

$(f^{-1}og)(x) = 3x + 5$

**olduğuna göre $g^{-1}(-1)$ kaçtır?**

A) $-\dfrac{4}{3}$ B) −1 C) $-\dfrac{1}{2}$ D) 1 E) $\dfrac{4}{3}$

**27.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 2$ olmak üzere,

**(gof)(x) = 18 koşulunu sağlayan x değerlerinin kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) {−1, 1} B) {−7, 7} C) {1, 7}

D) {−7, 1} E) {−1, 7}

**28.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlanan iki fonksiyon olmak üzere,

$f^{-1}(3) = g(2) = -4$

**olduğuna göre (fog)(2) kaçtır?**

A) 3 B) 2 C) −2 D) −3 E) −4

**29.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlanan iki fonksiyon olmak üzere,

$f(x) = x^2 - 3x - 4$

$(gof)(x) = 4x^2 - 12x + 4$

**olduğuna göre $g(-3)$ kaçtır?**

A) 18 B) 12 C) 8 D) 6 E) 4

**30.** Uygun koşullarda tanımlı $f$ fonksiyonu için,

$$x = \frac{3f(x)}{2f(x)-1}$$

**olduğuna göre $f^{-1}(-1)$ kaçtır?**

A) $-1$ B) 0 C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

**31.** $f: \mathbb{R} - \{-5\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{ax-5}{x+b}$$

veriliyor.

**f fonksiyonu bire bir ve örten olduğuna göre a + b kaçtır?**

A) 7 B) 5 C) 3 D) $-3$ E) $-7$

**32.** Uygun koşullarda tanımlı $f$ fonksiyonu için,

$$f\left(\frac{x-3}{x+2}\right) = 2x - 5$$

**olduğuna göre $f^{-1}(-3)$ kaçtır?**

A) $-1$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) $-\frac{2}{3}$

**33.** $f: [3, \infty) \to [-4, \infty)$ olmak üzere,

$f(x) = x^2 - 5x + 2$ ve $f^{-1}(16) = a$

**olduğuna göre a kaçtır?**

A) $-2$ B) 3 C) 7 D) 9 E) 11

**34.** $f: [2, 6] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ve

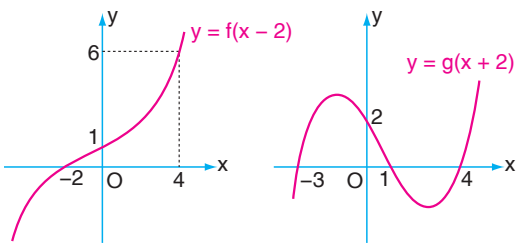
$g: [1, 5] \to \mathbb{R}$, $g(x) = -2x^2 + 3$

**olduğuna göre (f + g)(x) fonksiyonunun görüntü kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $[1, 22]$ B) $[-22, 2]$ C) $[-47, 1]$

D) $[-22, -1]$ E) $[4, 36]$

**35.**



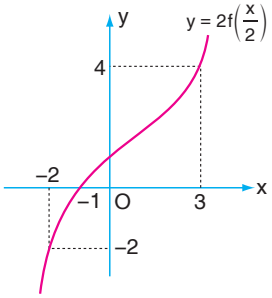

Yukarıda $y = f(x-2)$ ve $y = g(x+2)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre,

$f(g(x) + 2) = 6$

**eşitliğini sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?**

A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 8

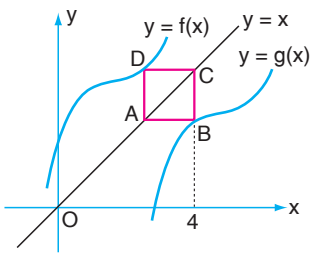
**36.** Yanda $y = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.




**Buna göre $f^{-1}(2) + f^{-1}(-1)$ değeri kaçtır?**

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) $\frac{7}{2}$

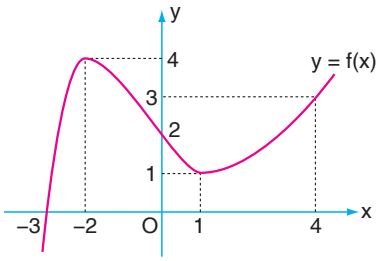
**37.** Yanda B noktası $y = g(x)$, D noktası $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerindedir.




**ABCD dörtgeninin kenarları eksenlere paralel olduğuna göre $(fog)(4)$ kaçtır?**

A) 4 B) 6 C) 8 D) 12 E) 16

**38.**

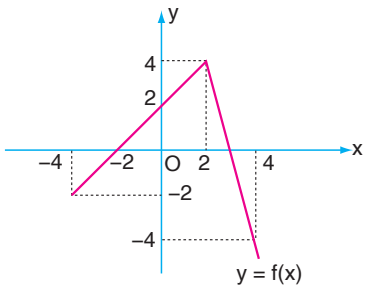



Yukarıda f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

**Buna göre $(fof)(x) = 2$ eşitliğini sağlayan kaç farklı x değeri vardır?**

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

**39.**

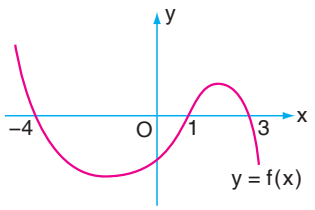



Yukarıda gerçek sayılarda tanımlı $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

**Buna göre $\underbrace{(fofofo...of)}_{\text{27 tane}}(4)$ değeri kaçtır?**

A) –4 B) –2 C) 0 D) 2 E) 5

**40.** Yanda $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir.




**Buna göre $x \cdot f(x) \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan kaç farklı x tam sayısı vardır?**

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

**41.** $(fog)(x) = 4x$ ve $(goh)(x) = 4x + 3$ **olduğuna göre** $\frac{f(7)}{h(1)}$ **oranı kaçtır?**

A) –4 B) –3 C) 0 D) 2 E) 4

# 3. ALT ÖĞRENME ALANI

# POLİNOM

## Konular


**3.1** Polinom Kavramı ve Polinomlarla İşlemler

**3.2** Polinomların Çarpanlarına Ayrılması


*Polinomlar, matematiğin uygulama alanı oldukça geniş olan bir konusudur. Günlük hayatta; mühendislik, temel bilimler, ekonomi ve finans gibi birçok alanda polinomlar kullanılır. Örneğin fırlatılan bir cismin izlediği yörünge ve cismin hızı modellenirken polinomlar kullanılır.*

# Hazır mısınız?

**3. Alt Öğrenme Alanı**

**1.** Aşağıdaki ifadeleri en sade şekilde yazınız.

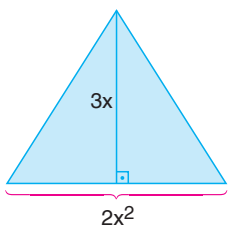
**a.** $2^3 \cdot 4^8$ **b.** $3^5 \cdot 27^2$

**c.** $(2x^5) \cdot (-3x^4)$ **ç.** $(3ab^3) \cdot (2a^2b)$

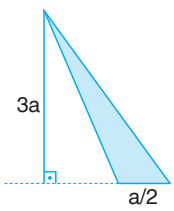
**d.** $\dfrac{(12x^8) \cdot (2x^3)^2}{(18x^2) \cdot (3x)^3}$ **e.** $\dfrac{((-2x)^2)^3 \cdot (-3x)^2}{(2x^2)^3 \cdot (-x)^2}$

**2.** Aşağıdaki geometrik şekillerin alanlarını bulunuz.

**a.**

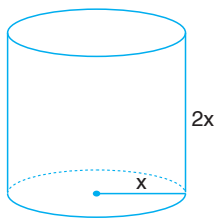



**b.**

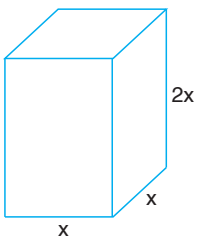



**3.** Aşağıdaki dik dairesel silindir ve kare dik prizmanın hacimlerini bulunuz.

**a.**




**b.**




**4.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun kuralı

$f(x) = x^2 - 2x + 7$ olmak üzere aşağıda istenenleri bulunuz.

**a.** $f(-1)$ **b.** $f(0)$ **c.** $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ **ç.** $f(2)$

**5.** Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını en sade şekilde yazınız.

**a.** $(x - 9)^2$ **b.** $(2x - 3)^2$

**c.** $(x - 5)(x + 5)$ **ç.** $(3x + 4)(3x - 5)$

**6.** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon ve $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2 + 1$ olmak üzere aşağıda istenenleri bulunuz.

**a.** $f(x) + g(x)$ **b.** $f(x) - g(x)$

**c.** $2f(x) - g(x)$ **ç.** $x\,f(x) + 3g(x)$

**7.** Aşağıdaki köklü ifadelerin değerlerini bulunuz.

**a.** $\sqrt{64}$ **b.** $\sqrt{121}$

**c.** $\sqrt{0,04}$ **ç.** $\sqrt{0,0081}$

**d.** $\sqrt{\dfrac{36}{625}}$ **e.** $\sqrt{\dfrac{8}{98}}$

**8.** Aşağıdaki işlemleri yapınız.

**a.** $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} : \left(1 - \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{3}$

**b.** $1 - \dfrac{1}{1 + \dfrac{2}{3 - \dfrac{1}{2}}}$

KONU 3.1

# POLİNOM KAVRAMI VE POLİNOMLARLA İŞLEMLER

## Polinom Kavramı

**Neler Öğreneceğiz?**

- Polinomu
- Polinomun derecesini
- Polinomun katsayılarını
- Polinomun sabit terimini
- Sabit polinomu
- Sıfır polinomu
- Kalan teoremini
- Polinomlarla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini yapmayı
- Polinomun sıfırlarını

Günlük Hayat Bağlantısı

- Katsayıların, bir değişkenin ve bu değişkenin doğal sayı kuvvetlerinin çarpımından oluşan tek terimli ifadelere bir değişkenli monom denir.

  **Örnek:** $2x,\ 5x^3,\ 4$

- Yukarıdaki tanıma göre bir değişkenli monom ifadede değişkenler sadece doğal sayı kuvvetleri ile bulunabilir. $(x, x^2, x^3, \ldots)$. Bu nedenle aşağıdaki ifadelerin birer monom olmadığına dikkat ediniz.

  **Örnek:**
  - $3x\sqrt{x^3}$ *(Değişken kök içinde olamaz.)*
  - $4|x|$ *(Değişken mutlak değer içinde olamaz.)*
  - $2\sin x$ *(Değişken trigonometrik fonksiyonların içinde yer alamaz.)*
  - $\frac{1}{x^2}$ *(Değişken kesirli bir ifadenin paydasında yer alamaz.)*

- Yukarıdaki kısıtlamalar monom ifadenin katsayısı için geçerli değildir. Buna göre aşağıdaki ifadeler birer monomdur.

  **Örnek:** $-\frac{1}{3}x^2,\ \sqrt{2}x,\ |-5|x^3,\ \sin\frac{\pi}{2}\cdot x$

- Sonlu sayıda bir değişkenli monomun toplamından oluşan çok terimli ifadelere ise bir değişkenli polinom denir. Polinomlar genellikle $P(x)$, $R(x)$, $Q(x)$ gibi büyük harflerle gösterilir.

  **Örnek:** $P(x) = 2x^2 - \frac{1}{2}x + 3$

*Polinom*

*$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ gerçek sayılar $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

*biçimindeki ifadelere gerçek katsayılı ve bir değişkenli polinom denir.*

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ polinomunda;

- $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \in \mathbb{R}$ sayılarına katsayılar,
- $a_n \neq 0$ olmak üzere $a_n$ ye baş katsayı,
- $a_0,\ a_1x,\ a_2x^2,\ \ldots,\ a_nx^n$ ifadelerine polinomun terimleri,
- $a_0$ sayısına sabit terim denir.
- $a_r \in \mathbb{R}$ ve $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a_rx^r$ terimindeki $x$'in üstü olan $r$'ye bu terimin derecesi denir.
- $P(x)$ polinomunu oluşturan terimlerden derecesi en büyük olanın derecesine polinomun derecesi denir ve $\text{der}[P(x)]$ şeklinde gösterilir.

## 1. Örnek

**$P(x) = 5x^4 - 2x^2 + x - 3$ polinomunun;**

- 4 tane terimi vardır.
- Terimleri $5x^4$, $-2x^2$, $x$ ve $-3$'tür.
- Katsayıları 5, $-2$, 1 ve $-3$'tür.
- Derecesi 2 olan terimi $-2x^2$ dir.
- Derecesi 3 olan terimin katsayısı 0'dır *(Derecesi 3 olan terim yoktur.)*.
- Sabit terimi $-3$'tür.
- En büyük dereceli terimi $5x^4$ olduğundan polinomun derecesi 4, baş katsayısı 5'tir.

## 2. Örnek

**Aşağıdaki tabloda bazı fonksiyonlar verilmiştir. Bu fonksiyonlardan polinom olanların derecesini, katsayısını ve sabit terimini bulunuz. Polinom olmayanların ise nedenini yazınız.**

| Fonksiyon | Polinom mu? | Polinom Değilse Nedeni | Polinomsa Derecesi | Polinomsa Baş Katsayısı | Polinomsa Sabit Terimi |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x) = 7x^3 + \sqrt{3}x^2 - 0{,}5$ | | | | | |
| $P(x) = 5x^{-2} + 3x + \frac{1}{2}$ | | | | | |
| $P(x) = \sqrt[5]{3} + x^2$ | | | | | |
| $P(x) = \sqrt{7}x^5 - 3x^3 + \frac{5}{x^2} + x$ | | | | | |
| $P(x) = \frac{3}{2}x^5 + \sqrt{5}x^3$ | | | | | |
| $P(x) = -\frac{5}{2}$ | | | | | |
| $P(x) = 0$ | | | | | |

**UYARI**

Polinom tanımını sağlayan fonksiyonlara polinom fonksiyonu denir. Polinom fonksiyonlar, özel bir fonksiyon türüdür ve terimlerinin dereceleri doğal sayı olan fonksiyonlar olarak da tanımlanabilirler. Bu nedenle polinomlarla yapılan tüm işlemler fonksiyonlarla yapılanlarla benzerlik gösterir.

### 3. Örnek

$P(x)$ polinomu ile ilgili aşağıdakiler bilinmektedir.

- Derecesi 2'dir.
- Katsayıları birbirinden farklı rakamdır.
- Baş katsayısı 3'ten küçük doğal sayıdır.

**Bu koşulları sağlayan kaç farklı $P(x)$ polinomunun yazılabileceğini bulalım.**

**Çözüm**

$P(x)$ polinomu 2. dereceden ise $P(x) = ax^2 + bx + c$ şeklindedir.

$\underset{a}{\underline{2}} \quad \underset{b}{\underline{9}} \quad \underset{c}{\underline{8}}$

- a, 3'ten küçük doğal sayı ve sıfırdan farklı olmalıdır. O hâlde 1 ve 2 olma üzere 2 farklı değer alır.
- b ifadesi, a'dan farklı bir rakam olacağından 9 farklı değer alır.
- c ifadesi, a ve b'den farklı bir rakam olacağından 8 farklı değer alır.

O hâlde $a \cdot b \cdot c = 2 \cdot 9 \cdot 8 = 144$ olduğundan 144 farklı $P(x)$ polinomu yazılabilir.

---

- *$P(x) = a$ $(a \in \mathbb{R})$ polinomuna sabit polinom denir.*

  *$P(x) = a = a \cdot x^0$ olduğundan sabit polinomun derecesi 0'dır (sıfır).*

  *Örnek: $P(x) = 4$, $P(x) = \sqrt{3}$*

*Sabit Polinom*

- *$P(x) = 0$ polinomu sıfır polinomdur.*

  *$P(x) = 0 = 0 \cdot x^0 = 0 \cdot x^1 = 0 \cdot x^2 = ... = 0 \cdot x^n$ olduğundan sıfır polinomunun derecesi belli değildir.*

*Sıfır Polinomu*

---

### 4. Örnek

$P(x) = (m + 3) \cdot x^{2m - 4}$

$Q(x) = (m + n) \cdot x + k + 1$

**olmak üzere $P(x)$ sabit polinom ve $Q(x)$ sıfır polinomu olduğuna göre $m + n + k$ toplamı kaçtır?**

**Çözüm**

$P(x)$ sabit polinom ise derecesi sıfırdır.

$2m - 4 = 0 \Rightarrow m = 2$'dir.

$Q(x)$ polinomu sıfır polinom ise katsayıları sıfırdır.

$m = 2$ için,

$Q(x) = \underbrace{(2+n)}_{0} \cdot x + \underbrace{k+1}_{0}$

$2 + n = 0 \Rightarrow n = -2$ ve $k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1$'dir.

O hâlde $m + n + k = 2 + (-2) + (-1) = -1$ bulunur.

---

**Eşit Polinomlar**

- *Dereceleri eşit iki polinomun, aynı dereceli terimlerinin katsayıları eşit ise bu iki polinom eşittir.*
- *$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ ve $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n$ olmak üzere, $P(x) = Q(x)$ ise, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_{n-1} = b_{n-1}$, $a_n = b_n$ dir.*

**5. Örnek**

**$P(x) = (a - 2)x^3 - bx + 5$ ve $Q(x) = 4x - c + 3$ polinomları eşit ise $a + b + c$ değerini bulalım.**

**Çözüm**

$\underbrace{(a-2)}_{0}x^3 - bx + 5 = 4x - c + 3$

$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$'dir. *($P(x) = Q(x)$ ve $Q(x)$ te $x^3$ lü terim olmadığından)*

$-b = 4 \Rightarrow b = -4$'tür.

$5 = -c + 3 \Rightarrow c = -2$'dir.

O hâlde $a + b + c = 2 + (-4) + (-2)$

$= -4$ bulunur.

---

## 3.1.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdakilerden hangileri polinomdur?

**a.** $P(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{x}{3} + 4$ **b.** $P(x) = 3x^2 - \frac{3}{x} + 4x$ **c.** $P(x) = 3 - 2\sqrt{5}$

**ç.** $P(x) = 3x^2 - \sqrt{x} + 1$ **d.** $P(x) = \sqrt{3}x - 1$ **e.** $P(x) = \sqrt{3}\left(\sqrt[3]{x^2} + 1\right)$

**2.** Aşağıdaki polinomlardan hangileri sabit, hangileri sıfır polinomdur?

**a.** $P(x)=-\frac{7}{3}$ **b.** $P(x)=\frac{0}{\sqrt{2}}$ **c.** $P(x)=\sqrt{2}x$

**ç.** $P(x)=\sqrt{2}-\sqrt{3}$ **d.** $P(x)=\frac{x}{5}-3x^2$ **e.** $P(x)=x^2-x-x(x-1)$

**3.** Aşağıdaki polinomların terim sayılarını, derecelerini, baş katsayılarını ve sabit terimlerini bulunuz.

**a.** $P(x)=\frac{1}{2}x^5-\sqrt{2}x^3+\frac{x}{2}$ **b.** $P(x)=\sqrt[3]{2}x-\sqrt{3}x^3+\frac{1}{2}$

**c.** $P(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{3}$ **ç.** $P(x)=x\cdot(x^2+1)-x^2(x-1)$

**4.** $P(x)=\frac{3a+1}{2}-5x^5+(b+1)x^6+c(b^2+1)x^3$ ve

$Q(x)=2bx^6-(1+2d)x^5+(e-2)x^4-6x^3-4$

polinomları için $P(x)=Q(x)$ olduğuna göre a, b, c, d ve e sayılarını bulunuz.

## Polinomlarla Dört İşlem

### Polinomlarla Toplama ve Çıkarma İşlemleri

Polinomlarla toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri yapmak için kullanılacak yöntemleri fonksiyonlar konusundan biliyoruz. Burada kısa bir tekrar yapalım.

**UYARI**

Buradan sonra polinom denildiğinde gerçek katsayılı ve bir değişkenli polinomlar anlaşılmalıdır.

*İki polinomun toplamı (farkı) bulunurken benzer terimler toplanır (birbirinden çıkarılır).*

**6. Örnek**

**$P(x)=5x^3-4x^2+3x-5$ ve $Q(x)=2x^3+x^2+12$ ise,**

**a.** $P(x)+Q(x)$ **b.** $P(x)-Q(x)$

**polinomlarını bulalım.**

**Çözüm**

**a.** $P(x)+Q(x)=(5x^3-4x^2+3x-5)+(2x^3+x^2+12)$

$=7x^3-3x^2+3x+7$

**b.** $P(x)-Q(x)=(5x^3-4x^2+3x-5)-(2x^3+x^2+12)$

$=3x^3-5x^2+3x-17$

- *Dereceleri farklı olan iki polinomun toplamının veya farkının derecesi, derecesi büyük olan polinomun derecesine eşittir.*
- *Dereceleri aynı olan iki polinomun toplamının veya farkının derecesi polinomlardan birinin derecesine eşit ya da bu değerden küçüktür.*

### Bir Polinomun Skaler ile Çarpımı

*Bir polinomu bir gerçek sayı (skaler) ile çarpmak için polinomun her bir terimi o gerçek sayı ile çarpılır.*

**7. Örnek**

**$P(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 2$ ise,**

**a.** $3P(x)$ **b.** $-2P(x)$

**polinomlarını bulalım.**

**Çözüm**

**a.** $3P(x) = 3(4x^3 - 3x^2 + x - 2)$
$= 12x^3 - 9x^2 + 3x - 6$

**b.** $-2P(x) = -2(4x^3 - 3x^2 + x - 2)$
$= -8x^3 + 6x^2 - 2x + 4$

### Polinomların Çarpımı

*İki polinom ile çarpma işlemi yaparken ilk polinomun her bir terimi ile ikinci polinomun her terimi ayrı ayrı çarpılır. Sonra benzer terimler toplanır.*

**8. Örnek**

**$P(x) = 3x^3 - x + 1$ ve $Q(x) = 2x^3 + x^2 - 2$ ise $P(x) \cdot Q(x)$ polinomunu bulalım.**

**Çözüm**

$P(x) \cdot Q(x) = (3x^3 - x + 1) \cdot (2x^3 + x^2 - 2)$
$= 3x^3 \cdot (2x^3 + x^2 - 2) - x \cdot (2x^3 + x^2 - 2) + 1 \cdot (2x^3 + x^2 - 2)$
$= 6x^6 + 3x^5 - 6x^3 - 2x^4 - x^3 + 2x + 2x^3 + x^2 - 2$
$= 6x^6 + 3x^5 - 2x^4 - 5x^3 + x^2 + 2x - 2$ bulunur.

Dikkat ederseniz $P(x)$ polinomu 3. dereceden, $Q(x)$ polinomu üçüncü dereceden, $P(x) \cdot Q(x)$ polinomu ise 6. derecedendir $(3 + 3)$.

**UYARI**

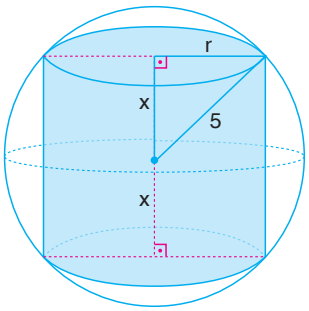
İki polinom çarpılırken çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği ve $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ kuralı kullanılır.

*Sıfırdan farklı iki polinomun çarpımının derecesi, bu polinomların dereceleri toplamına eşittir.*

$$der[P(x)\cdot Q(x)] = der[P(x)] + der[Q(x)]$$

**9. Örnek**

Bir dik dairesel silindir, şekildeki gibi yarıçapının uzunluğu 5 birim olan bir küre içine yerleştiriliyor. Buna göre;

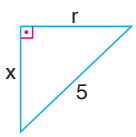



**a.** **Silindirin hacmini x cinsinden modelleyen bir değişkenli polinomu yazalım.**

**b.** **x = 3 birim için silindirin hacmini bulalım.**

**Çözüm**

**a.** Pisagor teoremine göre,




$5^2 = r^2 + x^2$

$r^2 = 25 - x^2$ dir.

Silindirin hacmi,

$V(x) = \pi r^2 h$

$= \pi(25 - x^2)\cdot 2x$

$= 2\pi x(25 - x^2)$

$= (50\pi x - 2\pi x^3)$ br$^3$ bulunur.

**b.** x = 3 birim için silindirin hacmi,

$V(x) = 50\pi x - 2\pi x^3$

$V(3) = 50\pi\cdot 3 - 2\pi 3^3$

$V(3) = 150\pi - 54\pi = 96\pi$ br$^3$ bulunur.

**Hatırlayalım**

Dik dairesel silindirin hacminin, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımına eşit olduğunu hatırlayınız.

## 3.1.2 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** $P(x) = x^2 + 2x + 3$ ve $Q(x) = 2x^2 + 3x + 1$ ise aşağıdaki polinomları bulunuz.

**a.** $2P(x)$ **b.** $P(x) + Q(x)$ **c.** $P(x) - 3Q(x)$

**ç.** $P(x)\cdot Q(x)$ **d.** $x\cdot P(x) + 2Q(x)$ **e.** $[P(x)]^2$

**2.** Aşağıdaki ifadelerin açık hâllerini en sade şekilde yazınız.

**a.** $(x^2 - x + 3)\cdot(3x + 2)$

**b.** $(x + 1)^2(x^2 + 2x - 3)$

**c.** $(x + 3)^3$

**ç.** $(2x^2 - x + 5)^2$

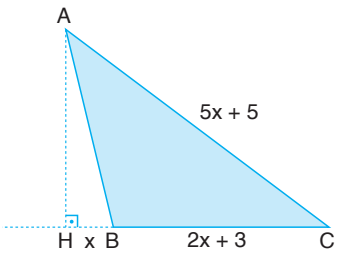
**d.** $(2x - 1)^4$

**e.** $(2x - 1)^2(3x + 2)\cdot(x - 3)$

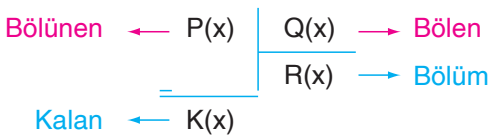
**3.** Yandaki şekilde verilenlere göre;

**a.** ABC üçgeninin alanını x cinsinden modelleyen bir değişkenli polinomu yazınız.

**b.** x = 2 birim için ABC üçgeninin alanını bulunuz.




## Polinomlarla Bölme İşlemi




Yukarıdaki bölme işleminde;

- $Q(x) \neq 0$,
- $der[P(x)] \geq der[Q(x)]$,
- $der[K(x)] < der[Q(x)]$ olmalıdır.

Bölme işlemine göre,

$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{K(x)}{Q(x)}$ veya $\underbrace{P(x)}_{\text{Bölünen}} = \underbrace{Q(x)}_{\text{Bölen}} \cdot \underbrace{R(x)}_{\text{Bölüm}} + \underbrace{K(x)}_{\text{Kalan}}$ yazılabilir.

- $K(x) = 0$ ise $P(x) = Q(x).R(x)$ olup $P(x)$ polinomu $Q(x)$'e tam bölünür.

## Bir Polinomun Birinci Dereceden Polinoma Bölünmesi

*$P(x)$ polinomu, birinci dereceden bir polinoma $(ax + b)$ bölünürse kalan gerçek sayıdır.*

$$\underbrace{P(x)}_{\text{Bölünen}} = \underbrace{Q(x)}_{\text{Bölüm}}\underbrace{(ax + b)}_{\text{Bölen}} + \underbrace{k}_{\text{Kalan}} \quad (k \in \mathbb{R})$$

## 10. Örnek

**$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 4$ polinomunu $Q(x) = x - 3$ polinomuna bölelim. Bölüm ve kalanı bulalım.**

### Çözüm

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 3x^2 + x - 4 & x - 3 \\ -(2x^3 - 6x^2) & \underline{2x^2 + 3x + 10} \\ \hline 3x^2 + x & \text{Bölüm} \\ -(3x^2 - 9x) & \\ \hline 10x - 4 & \\ -(10x - 30) & \\ \hline 26 \longrightarrow \text{Kalan} & \end{array}$$

**1. Adım:** Polinomların her ikisinin de terimleri, derecesi büyükten küçüğe doğru sıralanır.

**2. Adım:** Bölünenin birinci terimi, bölenin birinci terimine bölünür ve bölüm yazılır.

**3. Adım:** Bulunan bu bölüm ile bölenin bütün terimleri çarpılarak aynı dereceli terimler alt alta gelecek biçimde bölünen altına yazılır ve çıkarılır.

**4. Adım:** Çıkarma işleminde bulunan polinomun birinci terimi, bölenin birinci terimine bölünür ve bölüm yazılır. Daha sonra 3. adımdaki işlemler aynen uygulanır.

**5. Adım:** Kalanın derecesi, bölenin derecesinden küçük olana kadar aynı işleme devam edilir.

*Dikkat ederseniz bölünen 3. dereceden, bölen 1. dereceden, bölüm 2. derecedendir $(3 - 1 = 2)$.*

$\underbrace{2x^3 - 3x^2 + x - 4}_{\text{Bölünen}} = \underbrace{(2x^2 + 3x + 10)}_{\text{Bölüm}} \cdot \underbrace{(x - 3)}_{\text{Bölen}} + \underbrace{26}_{\text{Kalan}}$ şeklinde yazabiliriz.

## 11. Örnek

**$P(x) = 6x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 8x$ polinomunu $Q(x) = 3x - 1$ polinomuna bölelim. Bölüm ve kalanı bulalım.**

### Çözüm

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 8x & 3x - 1 \\ -(6x^4 - 2x^3) & \underline{2x^3 - x^2 + x + 3} \\ \hline -3x^3 + 4x^2 & \text{Bölüm} \\ -(-3x^3 + x^2) & \\ \hline 3x^2 + 8x & \\ -(3x^2 - x) & \\ \hline 9x & \\ -(9x - 3) & \\ \hline 3 \longrightarrow \text{Kalan} & \end{array}$$

*Dikkat ederseniz bölünen 4. dereceden, bölen 1. dereceden, bölüm 3. derecedendir $(4 - 1 = 3)$.*

$\underbrace{(6x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 8x)}_{\text{Bölünen}} = \underbrace{(2x^3 - x^2 + x + 3)}_{\text{Bölüm}} \underbrace{(3x - 1)}_{\text{Bölen}} + \underbrace{3}_{\text{Kalan}}$

## Bir Polinomun İkinci Dereceden Polinoma Bölünmesi

*P(x) polinomu, ikinci dereceden bir polinoma $(ax^2 + bx + c)$ bölünürse kalan en fazla birinci dereceden bir polinom olur.*

$$\underbrace{P(x)}_{\text{Bölünen}} = \underbrace{Q(x)}_{\text{Bölüm}}\,\underbrace{(ax^2 + bx + c)}_{\text{Bölen}} + \underbrace{(ex + f)}_{\text{Kalan}}$$

### 12. Örnek

**$P(x) = x^5 + 2x^3 + x - 1$ polinomunu $Q(x) = x^2 + x - 1$ polinomuna bölelim. Bölüm ve kalanı bulalım.**

**Çözüm**

$$\begin{array}{r|l}
x^5 + 2x^3 + x - 1 & x^2 + x - 1 \\
\cline{2-2}
-(x^5 + x^4 - x^3) & x^3 - x^2 + 4x - 5 \\
\cline{1-1}
-x^4 + 3x^3 & \text{Bölüm} \\
-(-x^4 - x^3 + x^2) & \\
\cline{1-1}
4x^3 - x^2 + x & \\
-(4x^3 + 4x^2 - 4x) & \\
\cline{1-1}
-5x^2 + 5x - 1 & \\
-(-5x^2 - 5x + 5) & \\
\cline{1-1}
10x - 6 \longrightarrow \text{Kalan} &
\end{array}$$

*Dikkat ederseniz bölünen 5. dereceden, bölen 2. dereceden, bölüm 3. derecedendir (5 – 2 = 3).*

$$\underbrace{x^5 + 2x^3 + x - 1}_{\text{Bölünen}} = \underbrace{(x^3 - x^2 + 4x - 5)}_{\text{Bölüm}} \cdot \underbrace{(x^2 + x - 1)}_{\text{Bölen}} + \underbrace{10x - 6}_{\text{Kalan}}$$

*Sıfırdan farklı iki polinomun bölünmesinde, bölüm ve kalan birer polinom ise bölümün derecesini bulmak için bölünenin derecesinden bölenin derecesini çıkarırız.*

### 13. Örnek

**Bir $P(x)$ polinomu $2x^2 - 1$ ile bölündüğünde bölüm $x^3 + 3x^2$, kalan $5x + 4$ olduğuna göre $P(x)$ polinomunu bulalım.**

**Çözüm**

$$\begin{aligned}
P(x) &= \underbrace{(x^3 + 3x^2)}_{\text{Bölüm}}\,\underbrace{(2x^2 - 1)}_{\text{Bölen}} + \underbrace{(5x + 4)}_{\text{Kalan}} \\
&= 2x^5 - x^3 + 6x^4 - 3x^2 + 5x + 4 \\
&= 2x^5 + 6x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x + 4 \text{ bulunur.}
\end{aligned}$$

**14. Örnek**

**$P(x)$ ve $Q(x)$ polinomları için $der[P^2(x).Q(x)]=18$ ve $der\left[\frac{P(x)}{Q(x^3)}\right]=2$ ise $der[P(x)+Q(x)]$ değerini bulalım.**

**Çözüm**

$der[P(x)]=p$ ve $der[Q(x)]=q$ olsun.

Bir polinomun kuvvetinin derecesi polinomun derecesi ile kuvvetinin çarpımına eşittir.

$der[P^2(x).Q(x)]=18 \Rightarrow 2p+q=18$ **...(I)**

İki polinomun çarpımının derecesi, polinomların derecelerinin toplamına eşittir.

$der\left[\frac{P(x)}{Q(x^3)}\right]=2 \Rightarrow p-3q=2$ **...(II)** dir.

Her bir terimin derecesi x'in kuvveti ile çarpılacağından polinomun derecesi de x'in kuvveti ile çarpılır.

İki polinomun bölümünün derecesi, polinomların derecelerinin farkına eşittir.

**I** ve **II** nolu denklemlerin ortak çözümünden

$$\begin{array}{rl} & 2p+q=18 \\ -2/ & +\ p-3q=2 \\ \hline & 2p+q-2p+6q=18-4 \\ & 7q=14 \\ & q=2 \end{array}$$

ve $p-3\cdot 2=2 \Rightarrow p=8$ bulunur.

Dereceleri farklı iki polinomun toplamının derecesi, derecesi büyük olan polinomunkine eşit olacağından $der[P(x)+Q(x)]=8$ bulunur.

## 3.1.3 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdaki bölme işlemlerini yapıp bölüm ve kalanı bulunuz.

**a.** $\frac{x^2+3x-4}{x-2}$ **b.** $\frac{x^2-4x+11}{x+3}$ **c.** $\frac{2x^3+3x^2-3x-2}{2x+1}$

**ç.** $\frac{2x^3-x}{x+2}$ **d.** $\frac{6x^3+x^2-5}{2x-1}$ **e.** $\frac{3x^3+11x^2+8x}{3x-1}$

**2.** Aşağıdaki bölme işlemlerini yapıp $P(x)=Q(x).R(x)+K(x)$ şeklinde yazınız.

**a.** $\frac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$ **b.** $\frac{x^4-2x^3+x+3}{(x+1)(x-2)}$ **c.** $\frac{x^3}{x^2+3}$

**3.** Bir bölme işleminde bölen $x^2-x+1$, bölüm $x^2+5x+4$ ve kalan $-2x-3$ ise bölünen nedir?

**4.** $P(x) = x^6 - x^3 + 1$ ve $Q(x) = x^2 - 2x + 3$ ise aşağıda istenenleri bulunuz.

**a.** $\text{der}[P(x) + Q(x)]$

**b.** $\text{der}[xP(x) - 3Q(x)]$

**c.** $\text{der}[P(x) \cdot Q(x)]$

**ç.** $\text{der}[P^3(x) \cdot Q(x^5)]$

**d.** $\text{der}\left[\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right]$

**e.** $\text{der}\left[\dfrac{2P^3\left(Q(x^2+1)\right)}{P(2x)+Q(x^2)}\right]$

## 15. Örnek

$V_0$ hareketlinin ilk hızı, $t$ geçen süre ve $a$ ivme olmak üzere bir hareketlinin aldığı yol,

$$S(t) = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$ formülü ile hesaplanabilir.

**Buna göre 5 m/sn. ilk hız ve 0,4 m/sn.$^2$ ivme ile bir dağın tepesinden kayan kayakçının 20 saniye sonra kaç metre yol alacağını bulalım.**

**Çözüm**

$V_0 = 5$ m/sn. ve $a = 0{,}4$ m/sn.$^2$ olduğundan,

$s(t) = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow s(t) = 5t + 0{,}2t^2$ olur. İki farklı yolla 20 saniye sonra kayakçının kaç metre yol alacağını bulabiliriz.

**I. Yol**

$0{,}2t^2 + 5t$'yi $t - 20$'ye böleriz:

$$\begin{array}{r|l} 0{,}2t^2 + 5t & t - 20 \\ \cline{2-2} -(0{,}2t^2 - 4t) & 0{,}2t + 9 \\ \cline{1-1} \quad 9t & \\ -(9t - 180) & \\ \cline{1-1} \quad 180 & \end{array}$$

$\longrightarrow$ $s(20) = 180$'dir.

**II. Yol**

$t = 20$ için $s(t)$ bulunur:

$s(t) = 0{,}2t^2 + 5t$

$s(20) = 0{,}2 \cdot (20)^2 + 5 \cdot 20$

$= 0{,}2 \cdot 400 + 100$

$= 180$

O hâlde kayakçı, 20 saniye sonra 180 m yol almıştır.

**Bunları Biliyor musunuz?**

Yurdumuzda ilk kez 1914 yılında Kafkas cephesinde kayakçı er yetiştirmek üzere Erzurum'da açılan kurslarla 30 kayakçı yetiştirilmiştir. 1933 yılında bir grup öğretmen Uludağ'da kayak yaparak bu sporun Türkiye'de öncülüğünü yapmışlardır.

*Genel ağdan alınmıştır.*

---

• *$P(x)$ polinomunun $x - a$ ile bölünmesinden kalan $P(a)$'dır.*

---

**İspat:** $P(x)$ polinomunu $x - a$ ile böldüğümüzde bölüm $Q(x)$, kalan $k$ olsun.

$P(x) = Q(x)(x - a) + k$ olur.

$x - a = 0 \Rightarrow x = 0$ değerini bu eşitlikte yerine yazalım:

$P(a) = Q(a) \cdot \underbrace{(a - a)}_{0} + k$

$P(a) = k$ bulunur.

## 16. Örnek

**$P(x) = x^4 - 2x^3 - x + 3$ polinomunun $x - 2$ ile bölünmesinden elde edilen kalanı bulalım.**

**Çözüm**

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$'dir. *(Polinomda x yerine 2 yazalım.)*

$$\text{Kalan} = P(2) = 2^4 - 2\cdot 2^3 - 2 + 3$$
$$= 16 - 16 - 2 + 3$$
$$= 1 \text{ bulunur.}$$

## 17. Örnek

**$P(2x + 1) = x^5 - 2x^2 + x + 3$ polinomu veriliyor. $P(x)$ polinomunun $x - 3$ ile bölünmesinden kalanı bulalım.**

**Çözüm**

$P(x)$'in $x - 3$ ile bölümünden kalan $P(3)$'tür.

$P(2x + 1)$ polinomunda x yerine 1 yazarsak $P(3)$'ü buluruz.
*($2x + 1 = 3 \Rightarrow x = 1$'dir.)*

$$P(2x + 1) = x^5 - 2x^2 + x + 3$$
$$P(2\cdot 1 + 1) = 1^5 - 2\cdot 1^2 + 1 + 3$$
$$P(3) = 3 \text{ bulunur.}$$

## 18. Örnek

**$P(x + 1) = 2x^3 + x - 2$ polinomu veriliyor. $P(x - 3)$'ün $x - 2$ ile bölünmesinden kalanı bulalım.**

**Çözüm**

$P(x - 3)$'ün $x - 2$ ile bölünmesinden kalanı bulmak için $P(x - 3)$'te x yerine 2 yazarız *($x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$).*

$P(x - 3) \Rightarrow P(2 - 3) = P(-1)$ *[$P(x - 3)$ ün $x - 2$ ile bölünmesinden kalandır.]*

O hâlde $P(-1)$'i bulmalıyız.

$P(-1)$'i bulmak için $P(x + 1)$'de x yerine $-2$ yazarız.
*($x + 1 = -1 \Rightarrow x = -2$'dir.)*

$P(x + 1) = 2x^3 + x - 2$ *($x = -2$ yazalım.)*

$$P(-2 + 1) = 2\cdot(-2)^3 + (-2) - 2$$
$$P(-1) = -20 \text{ bulunur.}$$

- *$P(x) = 0$ denkleminin her bir köküne $P(x)$ polinomunun sıfırı (kökü) denir.*
- *$a$, $P(x)$ polinomunun sıfırı ise $P(a) = 0$'dır.*
- *$P(x) = 0$ denkleminin kökü $a$ ise $P(a) = 0$'dır.*
- *$a$, $P(x)$ polinomunun sıfırı ise $P(x)$ polinomu $x - a$ ile tam bölünür.*

**19. Örnek**

**$P(x) = x^3 - 4x$ polinomunun gerçek sayılar kümesindeki sıfırlarını bulalım.**

**Çözüm**

$P(x) = 0$ ise,

$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0$

$\Rightarrow x(x - 2)(x + 2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 2 \vee x_3 = -2$ bulunur.

O hâlde $P(x)$'in sıfırları $-2$, 0 ve 2'dir.

### 3.1.2 Kritik Düşünme

$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ ise $P(x)$'in sıfırları $x_1, x_2$ ve $x_3$ tür.

$P(x_1)$, $P(x_2)$ ve $P(x_3)$'ü bularak yukarıdaki ifadenin doğruluğunu gösteriniz.

**20. Örnek**

**$P(x) = 2x^3 + ax - 2$ polinomunun sıfırlarından biri 2 ise $P(x)$'in $x + 1$ ile bölümünden kalanı bulalım.**

**Çözüm**

2, $P(x)$'in sıfırı ise $P(x)$ polinomu $x - 2$ ile tam bölünür, yani $P(2) = 0$'dır.

$P(2) = 0$ ise,

$2 \cdot 2^3 + a \cdot 2 - 2 = 0 \Rightarrow 16 + 2a - 2 = 0$

$\Rightarrow 2a = -14$

$\Rightarrow a = -7$'dir.

$P(x)$'in $x + 1$ ile bölümünden kalan $P(-1)$'dir.

$P(x) = 2x^3 - 7x - 2$ ise $P(-1) = 2\cdot(-1)^3 - 7\cdot(-1) - 2$

$= -2 + 7 - 2 = 3$ bulunur.

*$P(a) = 0$ ise $x - a$, $P(x)$ polinomunun bir çarpanıdır.*

**İspat**

$P(x)$ polinomunun $x - a$ ile bölünmesiyle elde edilen bölüm $B(x)$, kalan $K(x)$ olsun.

$P(x) = (x - a)\cdot B(x) + K(x)$ olur.

$P(a) = 0$ ise kalan sıfır olacağından,

$P(x) = (x - a)\cdot B(x)$ olur. Bu eşitliğe göre $x - a$, $P(x)$ in bir çarpanıdır.

**21. Örnek**

3. dereceden $P(x)$ polinomunun sıfırları 3, 4 ve $-4$'tür.

**$P(1) = 30$ olduğuna göre $P(x)$ polinomunu bulalım.**

**Çözüm**

3, 4 ve $-4$; $P(x)$ in sıfırları ise $P(3) = 0$, $P(4) = 0$ ve $P(-4) = 0$'dır.

O hâlde $(x - 3)$, $(x - 4)$, $(x + 4)$ polinomun çarpanlarıdır. Bu durumda,

$P(x) = a\cdot(x - 3)\cdot(x - 4)\cdot(x + 4)$ şeklinde yazılabilir.

*$P(x)$ polinomu 3. dereceden olduğundan $(x - 3)$, $(x - 4)$ ve $(x + 4)$ dışında $x$ değişkeni içeren çarpanı yoktur.*

$P(x) = a\cdot(x - 3)\cdot(x^2 - 16)$

$P(x) = a\cdot(x^3 - 3x^2 - 16x + 48)$ olur.

$P(1) = 30$ ise $a\cdot(1^3 - 3\cdot1^2 - 16\cdot1 + 48) = 30$

$a\cdot30 = 30$

$a = 1$ olur.

O hâlde $P(x) = x^3 - 3x^2 - 16x + 48$'dir.

## 3.1.4 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdaki bölme işlemlerinde kalanı bölme işlemi yapmadan bulunuz.

| | Bölünen | Bölen |
|---|---|---|
| **a.** | $x^2 + 2x - 4$ | $x - 2$ |
| **b.** | $x^3 - x + 3$ | $x + 5$ |

**2.** Aşağıda verilenlere göre a değerlerini bulunuz.

**a.** $2x^3 + ax^2 + 4x - 5$ in $x - 3$ ile bölümünden kalan 34'tür.

**b.** $2ax^3 + ax - 2$ polinomu $x - 2$ ile tam bölünür.

**c.** $ax^3 + 3ax + x^2 + 3$ polinomunun sıfırlarından biri $-\frac{1}{2}$'dir.

**3.** Aşağıda verilenlere göre istenenleri bulunuz.

| | Verilen | İstenen |
|---|---|---|
| **a.** | $P(x-1) = x^5 - x^3 + 2x + 1$ | $P(x)$ in $x - 1$ ile bölümünden kalan |
| **b.** | $P(2x+3) = x^3 + 3x$ | $P(x)$ in $x + 1$ ile bölümünden kalan |
| **c.** | $P(x-2) = x^4 + x^3 - x^2 + 5$ | $P(2x+3)$ ün $x + 2$ ile bölümünden kalan |

**4.** 3. dereceden $P(x)$ polinomunun sıfırları $-2$, 1 ve 3'tür. $P(0) = -6$ olduğuna göre $P(x)$ polinomunu bulunuz.

**5.** $(x-2)\cdot P(x) = x^3 - x^2 - x - 2$ polinomu veriliyor. Buna göre $P(x+1)$'in $x - 1$ ile bölümünden kalan kaçtır?

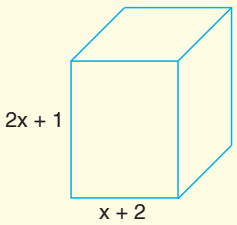
# 3.1 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI

**1.** $P(x) = x^3 - x + 2$ ve $Q(x) = 2x^2 + 3x + 1$ ise aşağıdaki polinomları bulunuz.

**a.** $2P(x) + 3Q(x)$ **b.** $P(x) - xQ(x)$

**c.** $P(x) \cdot Q(x)$ **ç.** $[Q(x)]^2$

**2.** Yandaki kare dik prizmanın boyutları x cinsinden verilmiştir. Buna göre;




**a.** Prizmanın hacmini x cinsinden veren bir değişkenli polinomu yazınız.

**b.** x = 3 birim için prizmanın hacmini bulunuz.

**3.** $P(x) = 6x^3 + 7x^2 - 19x + 7$ ve $Q(x) = (2x + a)(bx^2 + cx - 7)$ olmak üzere, $P(x) = Q(x)$ ise a, b ve c sayılarını bulunuz.

**4.** Aşağıdaki bölme işlemleri ile bu bölme işlemlerinden elde edilecek bölümleri eşleştiriniz.

**a.** $\dfrac{2x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1}{2x^2 - 3}$

**b.** $\dfrac{x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 7}{x^2 + 1}$

**c.** $\dfrac{2x^3 - x^2 - 6x}{2x - 1}$

**ç.** $\dfrac{x^3 - 2x^2 + x + 3}{x - 2}$

**I.** $x^2 - 3$

**II.** $x^2 + 1$

**III.** $x^2 - x$

**IV.** $x^2 + x - 1$

**V.** $x^2 + 3x$

**5.** $P(x) = (x - 3)(x^2 + 3x + 1) + 10$ ise $P(x)$ polinomu $x - 3$ ile bölündüğünde elde edilen bölüm ve kalan nedir?

**6.** Aşağıdaki noktalı yerleri uygun ifadelerle tamamlayınız.

**a.** $P(3) = 7$ ise $P(x)$'in $x - 3$ ile bölümünden kalan ..... dir.

**b.** $P(x) = (x + 2).Q(x) - 5$ ise $P(x)$'in $x + 2$ ile bölümünden kalan ..... tir.

**c.** $P(x)$'in $x - 4$ ile bölümünden kalan 3 ise $P(x)$ = ..... dir.

**7.** $P(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ ise;

**a.** $P(x)$'in $x - 1$ ile,

**b.** $P(x + 3)$'ün $x + 2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

**8.** $P(2x + 5) = 3x^4 - 4x^2 + x + 3$ ise;

**a.** $P(x)$'in $x - 5$ ile,

**b.** $P(x + 2)$'nin $x - 1$ ile,

**c.** $P(3x + 1)$'in $x - 2$ ile bölümünden kalan kaçtır?

**9.** $x - 1$ ve $x + 3$, $P(x) = x^3 + 4x^2 + ax + b$ polinomunun çarpanları ise a ve b'yi bulunuz.

KONU 3.2

# POLİNOMLARIN ÇARPANLARINA AYRILMASI

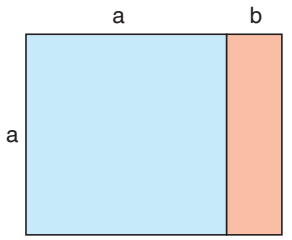
**Neler Öğreneceğiz?**

Bir polinomu;

- Ortak çarpan parantezine alarak,
- Gruplandırarak,
- Özdeşlikleri kullanarak,
- Terim ekleme ve terim çıkarma metodunu kullanarak,
- Değişken değiştirme yöntemini kullanarak çarpanlarına ayırmayı.
- Rasyonel ifadeyi,
- Rasyonel ifadeleri sadeleştirmeyi.

Günlük Hayat Bağlantısı

Yandaki dikdörtgen birer kenarları ortak mavi kare ve kırmızı dikdörtgenden oluşmaktadır.




Bu dikdörtgenin alanı kısa ve uzun kenar uzunlukları çarpılarak

$a \cdot (a + b)$ şeklinde bulunabilir.

Bu dikdörtgenin alanı aynı zamanda mavi kare ve kırmızı dikdörtgenin alanları toplanarak

$a^2 + a \cdot b$ şeklinde de bulunabilir.

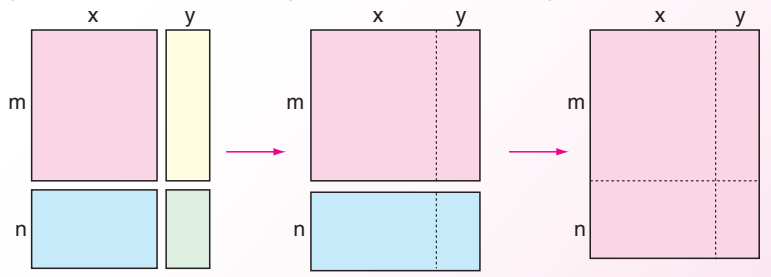
O hâlde $a^2 + a \cdot b = a \cdot (a + b)$ eşitliğini yazabiliriz.

$a \cdot (a + b)$ ifadesi, $a^2 + a \cdot b$ ifadesinin çarpanlarına ayrılmış hâlidir.

- *Bir polinomu iki ya da daha çok polinomun çarpımı biçiminde yazmaya bu polinomu çarpanlarına ayırma denir.*
- *$P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ birer polinom olmak üzere $P(x) = Q(x) \cdot R(x)$ ise $Q(x)$ ve $R(x)$ polinomlarına $P(x)$ polinomunun çarpanları denir.*

## 3.2.1 Etkinlik

*Şekil 1* *Şekil 2* *Şekil 3*




**a.** "Şekil 1"deki her bir dikdörtgenin alanını bulup toplayınız.

**b.** "Şekil 2"deki iki dikdörtgenin alanını bulup toplayınız.

**c.** "Şekil 3"teki dikdörtgenin alanını bulunuz.

**Analiz**

**1.** Yukarıdaki üç şeklin alanları arasında nasıl bir ilişki vardır?

**2.** a, b ve c'de bulduğunuz cebirsel ifadeler arasında nasıl bir ilişki vardır?

## Ortak Çarpan Parantezine Alarak Çarpanlara Ayırma

### 1. Örnek

**Aşağıdaki polinomları çarpanlarına ayıralım.**

**a.** $P(x) = 4x^2 - 8$ **b.** $P(x) = 9x^3 - 6x^2 + 12x$

**Çözüm**

**a.** $P(x) = 4x^2 - 8 = 4 \cdot x^2 - 4 \cdot 2$
$= 4(x^2 - 2)$

*[Her iki terimi de bölen en büyük çarpan 4'tür.]*

**b.** $P(x) = 9x^3 - 6x^2 + 12x = 3x \cdot 3x^2 - 3x \cdot 2x + 3x \cdot 4$
$= 3x(3x^2 - 2x + 4)$

*[Her üç terimi de bölen en büyük dereceli terim 3x'tir.]*

**UYARI**

Bir polinom ortak çarpan parantezine alınarak çarpanlarına ayırılırken;

- Polinomun her teriminde ortak olan çarpan, parantezin önüne yazılır.
- Bu çarpan her terime ayrı ayrı bölünür. Elde edilen bölümler parantez içine toplam biçiminde yazılır.

### 2. Örnek

**Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayıralım.**

**a.** $7x^3(x - 3) - 8(x - 3)$ **b.** $(2x + 3)(1 - 2a) + x(2a - 1)$

**Çözüm**

**a.** $7x^3(x - 3) - 8(x - 3) = (x - 3)(7x^3 - 8)$

**b.** $1 - 2a$ ve $2a - 1$ ters işaretli ifadelerdir. Önce $2a - 1$ ifadesini $-1$ parantezine alalım:

$(2x + 3)(1 - 2a) + x(2a - 1) = (2x + 3)(1 - 2a) - x(-2a + 1)$
$= (2x + 3)(1 - 2a) - x(1 - 2a)$
$= (1 - 2a)(2x + 3 - x)$
$= (1 - 2a)(x + 3)$

## Gruplandırarak Çarpanlara Ayırma

### 3. Örnek

**Aşağıdaki polinomları çarpanlarına ayıralım.**

**a.** $P(x) = x^3 + 7x^2 - 2x - 14$ **b.** $P(x) = x^3 + 30 + 6x^2 + 5x$

**Çözüm**

**a.** $P(x) = x^3 + 7x^2 - 2x - 14 = (x^3 + 7x^2) + (-2x - 14)$
$= x^2(x + 7) - 2(x + 7)$
$= (x + 7)(x^2 - 2)$

*[Ortak çarpanı olan terimler gruplanır.]*

*[Her bir terim ortak çarpan parantezine alınır.)*

**UYARI**

Bir polinom gruplandırılarak çarpanlarına ayırılırken;

- Ortak çarpanı olan terimler yan yana getirilerek gruplandırılır.
- Bu gruplar ortak çarpan parantezine alınarak ortak bir çarpan elde edilirse yeniden ortak çarpan parantezine alınır.

**b.** $P(x) = x^3 + 30 + 6x^2 + 5x = x^3 + 6x^2 + 5x + 30$

$= (x^3 + 6x^2) + (5x + 30)$

$= x^2(x + 6) + 5(x + 6)$

$= (x + 6)(x^2 + 5)$

---

## 4. Örnek

**$x = 100$ ve $y = 99$ ise $y(x^2 + 10) - x(y^2 + 10)$ ifadesinin eşitini bulalım.**

### Çözüm

Verilen ifadede ortak çarpan olmadığından önce parantezleri açalım:

$yx^2 + 10y - xy^2 - 10x$ olur. Şimdi gruplandıralım.

$yx^2 - xy^2 + 10y - 10x = xy(x - y) - 10(x - y)$

$= (x - y)(xy - 10)$ olur.

Şimdi bu ifadede $x = 100$ ve $y = 99$ yazalım.

$(100 - 99)\cdot(100.99 - 10) = 1\cdot(9900 - 10)$

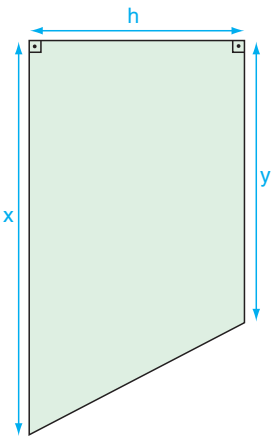
$= 9890$ bulunur.

---

## 5. Örnek

**$x = a + b$ ve $y = c + d$ olmak üzere yanda çizgi modeli verilen dik yamuğu alanları $\frac{ah}{2}$, $\frac{bh}{2}$, $\frac{ch}{2}$ ve $\frac{dh}{2}$ olan dört bölgeye nasıl bölebileceğimizi gösterelim.**

*Şekil 3.2.5*




### Çözüm

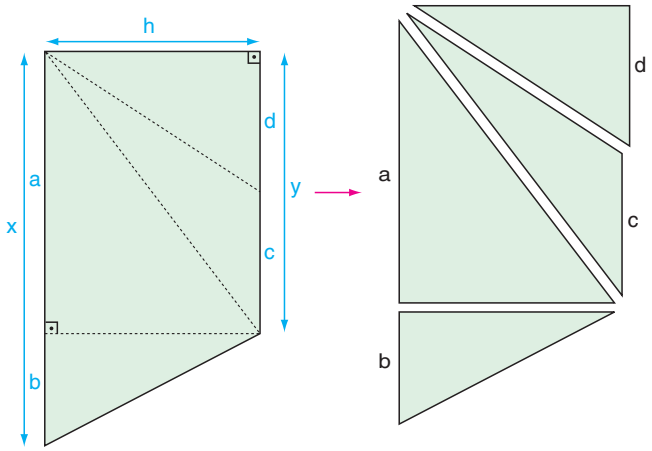
Dik yamuğun alanı,

$\frac{x+y}{2}\cdot h = \frac{h}{2}(x+y)$ *[Ortak çarpan parantezine alındı.]*

$= \frac{h}{2}(a+b+c+d)$ *[$x = a + b$ ve $y = c + d$ yazıldı.]*

$= \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} + \frac{ch}{2} + \frac{dh}{2}$ olur. *[Dağılma özelliği uygulandı.]*

Bu cebirsel ifadeye uygun örnek modelleme aşağıdaki gibi olabilir.




$x = a + b$ ve $y = c + d$ olacak şekilde a, b, c ve d değerlerinin değişebileceğine dikkat ediniz.

## 3.2.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

**a.** $18x - 12y$

**b.** $2m - 14mn$

**c.** $3xy - 6x + 18x^2$

**ç.** $2x^2y^3 - 14x^2y^2 + 4x^3y$

**d.** $12xy^2z - 18x^2yz^2$

**e.** $2x^3 - 2xy - 4xz$

**f.** $x(x + y) - 5(x + y)$

**g.** $(x - y)^2 + 2(y - x)$

**ğ.** $(x + y)(3x - 2y) - x - y$

**h.** $(x - y)^2(z - x) + y - x$

**ı.** $2 - 3x + a(3x - 2)$

**i.** $x^2(y - 5x)^2 + x^5(5x - y)$

**j.** $(x - 2)(1 - x) - (2 - x)(x - 1)$

**k.** $(x - y)^2(y - 3) - (y - x)(3 - y)$

**2.** Aşağıdaki polinomları çarpanlarına ayırınız.

**a.** $P(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 15$

**b.** $P(x) = 5x^3 - 12 - 3x^2 + 20x$

**c.** $P(x) = x^3 - x - x^2 + 1$

**ç.** $P(x) = x^3 + x + 1 + x^2$

**2.** Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

**a.** $xy + yz + xt + zt$

**b.** $x^2 + ab + ax + bx$

**c.** $ac - ad + 4bd - 4bc$

**ç.** $bx + 2x + ab + 2a$

**d.** $6x^2 + 2x - 9xy - 3y$

**e.** $x^4 + x^3 - x^2y - xy$

**f.** $xa - yb + xb - ya$

**g.** $xy(a^2 - b^2) - ab(x^2 - y^2)$

**ğ.** $y(x^2 - 2) + x(y^2 - 2)$

**h.** $xa(ay - xb) + by(ay - xb)$

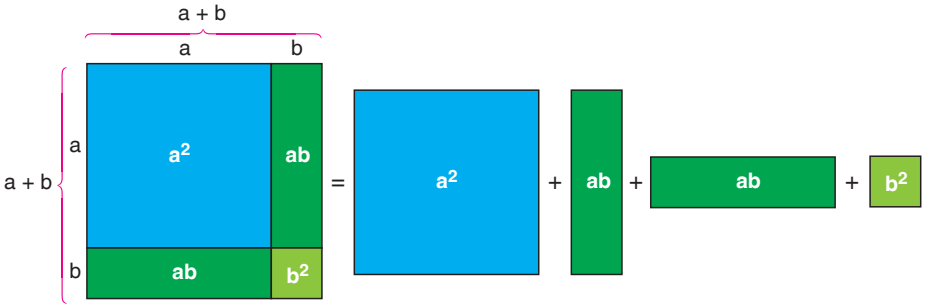
**ı.** $x^2y^2 + 1 + x^2 + y^2$

**i.** $ab - 2ac + 3ad + 4b - 8c + 12d$

## Tam Kare Özdeşliğini Kullanarak Çarpanlara Ayırma

### Tam Kare Özdeşliği

Aşağıda tam kare özdeşliği cebir karoları ile modellenmiştir. İnceleyiniz.




$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *dir.*

**6. Örnek**

**Aşağıdaki ifadelerin açılımlarını bulalım.**

**a.** $(2x - y)^2$ **b.** $\left(\frac{x}{3} + \frac{x^2}{2}\right)^2$

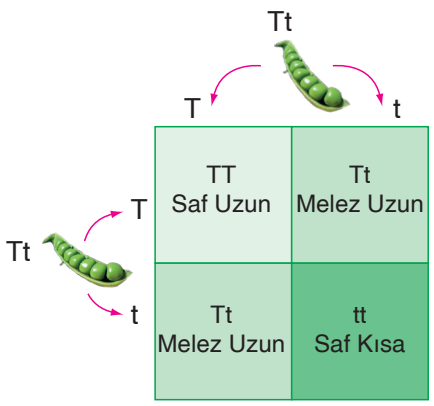
**Çözüm**

**a.** $(2x - y)^2 = (2x)^2 - 2.2xy + y^2$
$= 4x^2 - 4xy + y^2$

**b.** $\left(\frac{x}{3} + \frac{x^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2$
$= \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$

**7. Örnek**

Yandaki tablo her biri, uzunluk için baskın gen olan bir T ve kısalık için çekinik gen olan bir t geni taşıyan iki bezelye bitkisinin çaprazlanması sonucu oluşacak yavrunun kombinasyonlarını göstermektedir.




**Olası kombinasyonları modelleyen bir polinom yazalım ve iki bezelye bitkisinin çaprazlanması sonucunda oluşacak yavrunun saf uzun, melez uzun ve saf kısa olma olasılıklarını bulalım.**

**Çözüm**

İki bezelyede de bir T ve bir t geni olduğundan bezelyelerin sahip oldukları uzunluk genleri $0{,}5T + 0{,}5t$ ifadesi ile modellenebilir. Bu bezelyelerin çaprazlanması sonucu oluşacak yavrunun uzunluk gen kombinasyonu, $(0{,}5T + 0{,}5t)(0{,}5T + 0{,}5t)$ veya $(0{,}5T + 0{,}5t)^2$ ile modellenir.

Bu ifadenin açık hâlini yazarak yavru bezelyenin uzunluk olasılıklarını bulalım:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad [\text{Tam kare özdeşliği}]$$

$$(0{,}5T + 0{,}5t)^2 = (0{,}5T)^2 + 2(0{,}5T)(0{,}5t) + (0{,}5t)^2 \quad [a = 0{,}5T,\ b = 0{,}5t]$$

$$= 0{,}25T^2 + 0{,}5Tt + 0{,}25t^2 \quad [\text{Sadeleştirildi.}]$$

$$= 0{,}25TT + 0{,}5Tt + 0{,}25tt \quad [T^2 = TT,\ t^2 = tt]$$

O hâlde yavru bezelye % 25 olasılıkla saf uzun, % 50 olasılıkla melez uzun ve % 25 olasılıkla saf kısa olur.

---

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$ dir.

*Üç Terimin Toplamının Karesi*

**8. Örnek**

**Aşağıdaki ifadelerin açılımlarını bulalım.**

**a.** $(3 + x - y)^2$ **b.** $(x^2 - x - 2)^2$

**Çözüm**

**a.** $(3 + x - y)^2 = 3^2 + x^2 + (-y)^2 + 2[3x + 3\cdot(-y) + x\cdot(-y)]$

$= 9 + x^2 + y^2 + 6x - 6y - 2xy$

**b.** $(x^2 - x - 2)^2 = (x^2)^2 + (-x)^2 + (-2)^2 + 2[x^2\cdot(-x) + x^2\cdot(-2) + (-x)\cdot(-2)]$

$= x^4 + x^2 + 4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x$

$= x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$

---

*Tam kare özdeşliklerinden aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir:*

- $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$
- $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$
- $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$
- $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$
- $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab + ac + bc)$

**Tarih Kutusu**

**Gregor Mendel**
***(Greygo Mende)***

**(1822–1884)**
*(Temsilî resimdir.)*

Kalıtım biliminin babası olarak anılan Avusturyalı bilim adamı Mendel, bitkiler üzerine uzun yıllar sabır ve titizlikle yaptığı çalışmalar sonucunda, bir türün özelliklerinin kalıtım yoluyla sonraki kuşaklara aktarıldığını bulmuştur. Mendel deneylerini yaparken bezelye bitkisinden faydalanmıştır. Bezelye bitkilerinin tohum şekli (buruşuk, düz), tohum rengi (sarı, yeşil), bitki boyu (kısa, uzun) gibi özelliklerinin bir sonraki kuşağa nasıl aktarıldığını incelemiştir. Mendel'nin bu çalışmasına benzer çalışmalar daha önceden de yapılmıştı. Ancak Mendel'nin farkı elde ettiği sonuçları olasılık hesaplarından faydalanarak ifade etmesidir.

*Genel ağdan alınmıştır.*

## 9. Örnek

**Kareleri toplamı 18, çarpımları 9 olan iki pozitif gerçek sayının toplamını bulalım.**

**Çözüm**

Sayılardan biri $x$, diğeri $y$ olsun.

$x^2 + y^2 = 18$ , $x \cdot y = 9 \Rightarrow x + y = ?$

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ özdeşliğini kullanalım:

$18 = (x + y)^2 - 2 \cdot 9$

$36 = (x + y)^2 \Rightarrow x + y = 6$ bulunur.

## 10. Örnek

**İki sayının toplamı 22, farkı 8 ise çarpımlarını bulalım.**

**Çözüm**

Sayılardan biri $x$, diğeri $y$ olsun.

$x + y = 22$, $x - y = 8 \Rightarrow x \cdot y = ?$

$(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$ özdeşliğini kullanalım:

$22^2 = 8^2 + 4xy$

$484 = 64 + 4xy$

$420 = 4xy \Rightarrow xy = 105$ bulunur.

## 11. Örnek

**$x - 2y = 5$ ve $x \cdot y = 2$ ise $x^2 + 4y^2$ ifadesinin değerini bulalım.**

**Çözüm**

$x - 2y = 5$ eşitliğinin iki tarafının da karesini alalım.

$(x - 2y)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2 = 25$

$\Rightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 = 25$

$\Rightarrow x^2 + 4y^2 = 25 + 4xy$

$\Rightarrow x^2 + 4y^2 = 25 + 4 \cdot 2$ $[xy = 2]$

$\Rightarrow x^2 + 4y^2 = 33$ bulunur.

## 12. Örnek

**$x - y - z = 5$ ve $x^2 + y^2 + z^2 = 19$ ise $xy + xz - yz$ ifadesinin değerini bulalım.**

**Çözüm**

$$(x-y-z)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + (-y)^2 + (-z)^2 + 2[x\cdot(-y) + x\cdot(-z) + (-y)\cdot(-z)] = 25$$

$$\Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2 + z^2} - 2(xy + xz - yz) = 25$$

$$\Rightarrow 19 - 2(xy + xz - yz) = 25$$

$$\Rightarrow xy + xz - yz = -3 \text{ bulunur.}$$

| *Cebirsel İfadesi* | *Örnek* |
|---|---|
| $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ | $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2(x)(3) + 3^2 = (x+3)^2$ |
| $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ | $x^2 - 12x + 36 = x^2 - 2(x)(6) + 6^2 = (x-6)^2$ |

## 13. Örnek

**Aşağıdaki polinomları çarpanlarına ayıralım.**

**a.** $P(x) = 27x^2 - 36x + 12$ **b.** $P(x) = x^2 + \frac{2x}{5} + \frac{1}{25}$

**c.** $P(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{9}$

**Çözüm**

**a.** $P(x) = 27x^2 - 36x + 12 = 3(9x^2 - 12x + 4)$

$$= 3[(3x)^2 - 2(3x)(2) + (2)^2]$$

$$= 3(3x-2)^2$$

**b.** $P(x) = x^2 + \frac{2x}{5} + \frac{1}{25} = (x)^2 + 2\cdot x\cdot\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2$

$$= \left(x + \frac{1}{5}\right)^2$$

**c.** $P(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{9} = \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{x}{3}\right) + \left(\frac{x}{3}\right)^2$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}\right)^2$$

### 3.2.2 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdaki ifadelerin açılımlarını bulunuz.

**a.** $(x-2)^2$ **b.** $(2x+3)^2$ **c.** $(x-2y)^2$

**ç.** $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}\right)^2$ **d.** $(x-y-z)^2$ **e.** $(x^2-2x+3)^2$

**2.** Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

**a.** Toplamları 3, çarpımları 2 olan iki gerçek sayının kareleri toplamı kaçtır?

**b.** İki sayının toplamı 15, farkı 8 ise çarpımı kaçtır?

**3.** Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

**a.** $x-y=3$ ve $x^2+y^2=15$ ise $x\cdot y$ kaçtır?

**b.** $3x-2y=7$ ve $x\cdot y=2$ ise $9x^2+4y^2$ kaçtır?

**4.** $a-b+c=7$ ve $ab-ac+bc=-2$ ise $a^2+b^2+c^2$ kaçtır?

**5.** Aşağıdaki polinomları çarpanlarına ayırınız.

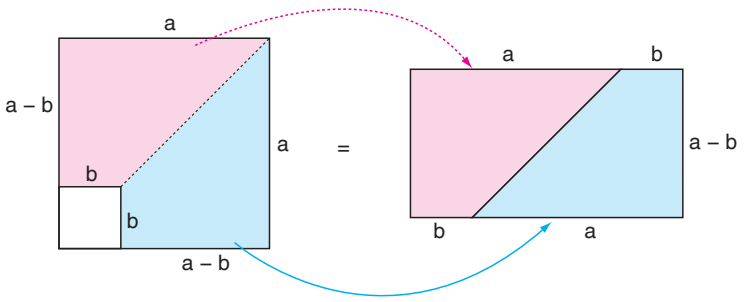
**a.** $P(x)=x^2-4x+4$ **b.** $P(x)=9x^2-6x+1$

**c.** $P(x)=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$ **ç.** $P(x)=\frac{x^2}{9}-\frac{x^4}{3}+\frac{x^6}{4}$

## İki Kare Farkı Özdeşliğini Kullanarak Çarpanlara Ayırma

### İki Kare Farkı Özdeşliği

Aşağıda iki kare farkı özdeşliği kare ve dikdörtgenin alanları kullanılarak gösterilmiştir. İnceleyiniz.




Boyalı Alan = Dikdörtgenin Alanı

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

## 14. Örnek

**$\sqrt{499 \cdot 501 + 1}$ ifadesinin eşitini bulalım.**

**Çözüm**

$499 \cdot 501 = (500 - 1) \cdot (500 + 1)$

$= 500^2 - 1$ olur. O hâlde,

$\sqrt{499 \cdot 501 + 1} = \sqrt{500^2 - 1 + 1}$

$= \sqrt{500^2} = 500$ bulunur.

## 15. Örnek

**$a - b = b - c = 5$ olduğuna göre $2b^2 - a^2 - c^2$ ifadesinin değerini bulalım.**

**Çözüm**

$2b^2 - a^2 - c^2$

$= b^2 - a^2 + b^2 - c^2$ *[İfade yeniden düzenlendi.]*

$= (b - a)(b + a) + (b - c)(b + c)$ *[İki kare farkı özdeşliği]*

$= -5(b + a) + 5(b + c)$ *[$b - a = -5$ ve $b - c = 5$'tir.]*

$= -5b - 5a + 5b + 5c$ *[Dağılma özelliği]*

$= -5(a - b) - 5(b - c)$ *[Ortak çarpan parantezine alındı.]*

$= -5 \cdot 5 - 5 \cdot 5$ *[$a - b = 5$ ve $b - c = 5$'tir.]*

$= -50$ bulunur. *[İki kare farkı özdeşliği]*

| *Cebirsel İfadesi* | *Örnek* |
|---|---|
| $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ | $16x^2 - 9 = (4x - 3)(4x + 3)$ |

## 16. Örnek

**Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayıralım.**

**a.** $4x^2 - 9y^2$

**b.** $80 - 125x^2$

**c.** $2x^6 - 8x^4$

**ç.** $\frac{x^4}{81} - \frac{y^6}{16}$

**Çözüm**

**a.** $4x^2 - 9y^2$

$= (2x)^2 - (3y)^2$

$= (2x - 3y)(2x + 3y)$

**b.** $80 - 125x^2$

$= 5(16 - 25x^2)$

$= 5[4^2 - (5x)^2]$

$= 5(4 - 5x)(4 + 5x)$

**c.** $2x^6 - 8x^4$

$= 2x^4(x^2 - 4)$

$= 2x^4(x^2 - 2^2)$

$= 2x^4(x - 2)(x + 2)$

**ç.** $\frac{x^4}{81} - \frac{y^6}{16}$

$= \left(\frac{x^2}{9}\right)^2 - \left(\frac{y^3}{4}\right)^2$

$= \left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^3}{4}\right)\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^3}{4}\right)$

---

**17. Örnek**

**$25x^2 - 49y^2 + 14y - 1$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.**

**Çözüm**

$25x^2 - 49y^2 + 14y - 1$

$= 25x^2 - (49y^2 - 14y + 1)$ *[$-49y^2 + 14y - 1$ ifadesi $-1$ parantezine alındı.]*

$= (5x)^2 - [(7y)^2 - 2 \cdot 7y \cdot 1 + 1^2]$ *[İfade yeniden düzenlendi.]*

$= (5x)^2 - (7y - 1)^2$ *[Tam kare özdeşliği]*

$= (5x - 7y + 1)(5x + 7y - 1)$ *[İki kare farkı özdeşliği]*

---

## 3.2.3 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdaki polinomları çarpanlarına ayırınız.

**a.** $P(x) = x^2 - 25$ **b.** $P(x) = x^4 - x^2$ **c.** $P(x) = \frac{x^2}{9} - 1$

**2.** Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

**a.** $x^4 - y^2$ **b.** $2x^2 - 8y^2$ **c.** $63^2 - 37^2$

**ç.** $(x + y)^2 - (x - y)^2$ **d.** $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{16}$ **e.** $x - y$

**3.** Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

**a.** $4x^2 + 4x + 1 - 9y^2$ **b.** $4y^2 - 9x^2 + 6x - 1$

**c.** $x^3 - 2x^2 + x - xy^2$ **ç.** $x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^2$

**4.** Aşağıdaki işlemlerin sonuçlarını bulunuz.

**a.** $115 \cdot 125$ **b.** $\sqrt{201 \cdot 205 + 4}$

**5.** $a - c = c - b = 3$ ise $a^2 + b^2 - 2c^2$ kaçtır?

## İki Terimin Toplamının ve Farkının Küpü Özdeşliğini Kullanarak Çarpanlara Ayırma

### İki Terimin Toplamının ve Farkının Küpü Özdeşliği

Pascal üçgeninin 4. satırını kullanarak $(a + b)^3$ ve $(a - b)^3$ ifadelerinin açılımlarını bulalım:

$$(a+b)^3 = 1.a^3 \cdot b^0 + 3.a^2 \cdot b^1 + 3 \cdot a^1 \cdot b^2 + 1 \cdot a^0 \cdot b^3$$
$$= \mathbf{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} \text{ olur.}$$

$$(a-b)^3 = 1.a^3 \cdot (-b)^0 + 3.a^2 \cdot (-b)^1 + 3.a^1 \cdot (-b)^2 + 1 \cdot a^0 \cdot (-b)^3$$
$$= \mathbf{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} \text{ olur.}$$

**18. Örnek**

**Aşağıdaki ifadelerin açılımlarını bulalım.**

**a.** $(2x + 3)^3$ **b.** $\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^3$

**Çözüm**

**a.** $(2x + 3)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot (2x) \cdot 3^2 + 3^3$
$= 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

**b.** $\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^3 = x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot \frac{x^2}{2} + 3 \cdot x \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2}\right)^3$

$= x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^5 - \frac{x^6}{8}$

| Cebirsel İfadesi | Örnek |
|---|---|
| $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$ | $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3$ |
| $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$ | $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = (x^2 - 1)^3$ |

**19. Örnek**

**$x = \sqrt[3]{5} - 1$ ise $x^3 + 3x^2 + 3x + 4$ ifadesinin değerini bulalım.**

**Çözüm**

$x^3 + 3x^2 + 3x + 4 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 3$

$= (x + 1)^3 + 3$ olur.

$x = \sqrt[3]{5} - 1$ için,

$(x + 1)^3 + 3 = (\sqrt[3]{5} - 1 + 1)^3 + 3$

$= (\sqrt[3]{5})^3 + 3$

$= 5 + 3 = 8$ bulunur.

**20. Örnek**

**$a^3 - 27b^3 = 10$**

**$3ab^2 - a^2b = 6$**

**olduğuna göre $a - 3b$ değerini bulalım.**

**Çözüm**

Verilen ikinci eşitliğin her iki tarafını 9 ile çarpıp taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{array}{rl} & a^3 - 27b^3 = 10 \\ 9/ & + \; 3ab^2 - a^2b = 6 \\ \hline & a^3 - 27b^3 + 27ab^2 - 9a^2b = 10 + 54 \end{array}$$

$a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot (3b) + 3 \cdot a^2 \cdot (3b)^2 - (3b)^3 = 64$

$(a - 3b)^3 = 4^3$

$a - 3b = 4$ bulunur.

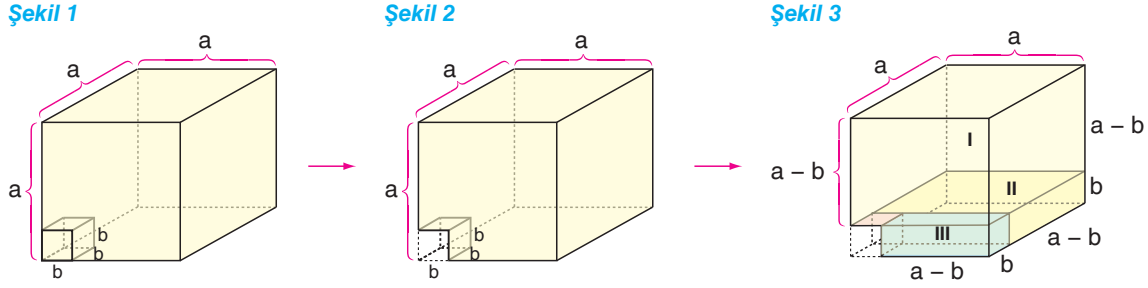
## İki Terimin Küpünün Toplamı ve Farkı Özdeşliğini Kullanarak Çarpanlara Ayırma

### İki Terimin Küpünün Toplamı ve Farkı Özdeşliği

Aşağıda $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ özdeşliği küp ve dikdörtgenler prizmasının hacmi kullanılarak gösterilmiştir. İnceleyiniz.

"Şekil 1"deki bir ayrıtının uzunluğu a birim olan bir küpün köşesinden "Şekil 2"de görüldüğü gibi bir ayrıtının uzunluğu b birim olan küp çıkarılırsa geriye kalan cismin hacmi I, II ve III numaralı cisimlerin hacimleri toplamına eşit olur.

*Şekil 1* *Şekil 2* *Şekil 3*




$$a^3 - b^3 = V_I + V_{II} + V_{III}$$
$$= a^2(a - b) + b.a(a - b) + b^2(a - b)$$
$$= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \text{ bulunur.}$$

**3.2.1 Kritik Düşünme**

Siz de $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ özdeşliğini geometrik olarak modelleyiniz.

| *Cebirsel İfadesi* | *Örnek* |
|---|---|
| $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ | $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ |
| $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ | $125 + 8x^3 = (5 + 2x)(25 - 10x + 4x^2)$ |

**21. Örnek**

**Aşağıdaki polinomları çarpanlarına ayıralım.**

**a.** $P(x) = 64 + \frac{x^3}{216}$ **b.** $P(x) = (1 - x)^3 - 27$

**Çözüm**

**a.** $P(x) = 64 + \frac{x^3}{216} = 4^3 + \left(\frac{x}{6}\right)^3 = \left(4 + \frac{x}{6}\right)\left[4^2 - 4 \cdot \frac{x}{6} + \left(\frac{x}{6}\right)^2\right] = \left(4 + \frac{x}{6}\right)\left(16 - \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{36}\right)$

**b.** $P(x) = (1-x)^3 - 27 = (1-x)^3 - 3^3$

$= (1-x-3)\cdot[(1-x)^2 + (1-x)\cdot 3 + 3^2]$

$= (-x-2)\cdot(1-2x+x^2+3-3x+9)$

$= -(x+2)(x^2-5x+13)$

---

## 22. Örnek

**$a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $ab = 4$ ve $a^2 + b^2 = 17$ olduğuna göre $a^3 + b^3$ ifadesinin değerini bulalım.**

**Çözüm**

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ **...(I)**'dir.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *[Tam kare özdeşliği]*

$= a^2 + b^2 + 2ab$ *[Terimlerin yerleri değiştirildi.]*

$= 17 + 2\cdot 4$ *[$a^2 + b^2 = 17$ , $ab = 4$]*

$= 25$ olur.

$(a+b)^2 = 25$ ise $a + b = 5$ $(a, b \in \mathbb{R}^+)$ olur.

**I** de $a + b = 5$, $a^2 + b^2 = 17$ ve $ab = 4$ değerleri yazılırsa,

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) = 5\cdot(17-4)$

$= 5\cdot 13 = 65$ bulunur.

---

*İki terimin toplamının (farkının) küpü ile iki terimin küpünün toplamı (farkı) özdeşliklerinden aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir.*

- $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
- $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

---

## 23. Örnek

**$x^3 + y^3 = xy(x+y) = 16$ ise $x + y$ ifadesinin değerini bulalım.**

**Çözüm**

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$= x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$

$= 16 + 3\cdot 16$ *[$x^3 + y^3 = 16$ ve $xy(x+y) = 16$]*

$= 64$ olur.

$(x+y)^3 = 64 \Rightarrow x + y = 4$ bulunur.

---

**24. Örnek**

**$a + b = 4$ ve $a.b = 3$ ise $a^6 + b^6$ ifadesinin değerini bulalım.**

**Çözüm**

$a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3$

$= (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$ **...(I)** olur.

$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

$= 4^2 - 2 \cdot 3 = 10$ olur.

$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$

$= 10^2 - 2 \cdot (3)^2 = 82$ olur.

$a^2 + b^2 = 10$ ve $a^4 + b^4 = 82$ değerleri **I**'de yerine yazılırsa,

$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 + b^4 - a^2b^2)$

$= 10 \cdot (82 - 3^2)$

$= 730$ bulunur.

## 3.2.4 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdaki ifadelerin açılımlarını bulunuz.

**a.** $(3 + a)^3$ **b.** $(\sqrt{2} - 1)^3$ **c.** $(2 - a^2)^3$ **ç.** $\left(\frac{3x}{2} - 2y\right)^3$

**2.** $x = \sqrt[3]{3} + 2$ ise $x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ ifadesinin eşiti kaçtır?

**3.** Aşağıdaki polinomları çarpanlarına ayırınız.

**a.** $P(x) = x^3 - 1$ **b.** $P(x) = 8x^3 - 27$ **c.** $P(x) = 81x^5 + 375x^2$

**ç.** $P(x) = 1 - 216x^3$ **d.** $P(x) = 27 - \frac{x^3}{8}$ **e.** $P(x) = \frac{1}{64} - \frac{x^3}{125}$

**4.** Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

**a.** $16a^3 - 2b^3$ **b.** $3x + 24x^4$ **c.** $x^3 + a^3b^3$

**ç.** $(x - y)^3 - 27$ **d.** $(x + 1)^3 + (x - 1)^3$ **e.** $8(x + y) - (x + y)^4$

**5.** $a^2 + b^2 = 5$ ve $a \cdot b = 2$ ise $a^3 - b^3$ kaçtır?

**6.** $x^2(x-3y)=12$ ve $y^2(y-3x)=-15$ ise $x-y$ kaçtır?

**7.** $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a^2+b^2=17$ ve $a\cdot b=4$ ise $a^6+b^6$ kaçtır?

## $x^2+bx+c$ ve $ax^2+bx+c$ Şeklindeki Üç Terimlilerin Çarpanlarına Ayrılması

*$x^2+bx+c$ nin Çarpanlarına Ayrılması*

*$x^2+bx+c$ üç terimlisi için,*

$$c=m\cdot n \text{ ve } b=m+n$$

*olacak şekilde $m$ ve $n$ sayıları bulunabiliyorsa,*

*$x^2+bx+c=(x+m)(x+n)$ biçiminde çarpanlarına ayrılır.*

**Tablo:** $-6$'nın Çarpanları ve Bunların Toplamı

| $-6$ nın Çarpanları | Çarpanların Toplamı |
|---|---|
| $-3, 2$ | $-1$ |
| $-2, 3$ | $1$ |
| $-6, 1$ | $-5$ |
| $-1, 6$ | $5$ |

**UYARI**

Doğru çarpanları bulduktan sonra diğer çarpanları denemeniz gerekmez. Bu nedenle "24. Örnek"te $-1$ ve $6$ çarpanlarını test etmeniz gerek yoktur.

**Tablo:** 8 in Çarpanları ve Bunların Toplamı

| 8 in Çarpanları | Çarpanların Toplamı |
|---|---|
| $-8, -1$ | $-9$ |
| $-4, -2$ | $-6$ |

### 24. Örnek

**$x^2-5x-6$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.**

**Çözüm**

$x^2-5x-6$ için $b=m+n=-5$ ve $c=m\cdot n=-6$ olduğundan $m$ ve $n$ den biri negatif, diğeri pozitif olmalıdır. $-6$ nın bu koşulu sağlayan çarpanları yandaki tabloda gösterilmiştir. Bu çarpanlardan toplamları $-5$ olan $-6$ ve $1$ olduğundan,

$$x^2-5x-6=(x+m)(x+n)$$
$$=(x+1)(x-6) \text{ bulunur.}$$

### 25. Örnek

**$P(x)=x^2-6x+8$ polinomunu çarpanlarına ayıralım.**

**Çözüm**

$P(x)=x^2-6x+8$ için $b=m+n=-6$ ve $c=m\cdot n=8$ olduğundan $m$ ve $n$ nin ikisinin de negatif olması gerekir. $8$'in bu koşulu sağlayan çarpanları yandaki tabloda gösterilmiştir.

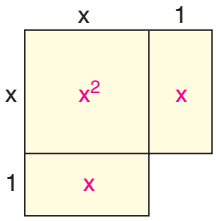
Bu çarpanlardan toplamları $-6$ olan $-4$ ve $-2$ olduğundan,

$$P(x)=x^2-6x+8=(x+m)(x+n)$$
$$=(x-4)(x-2) \text{ bulunur.}$$

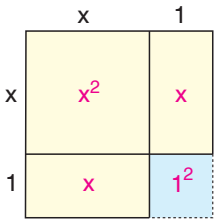
## $x^2 + bx + c$ Şeklindeki Polinomunun Tam Kareye Tamamlama Yöntemiyle Çarpanlarına Ayrılması

*$x^2 + bx + c$ üç terimlisini tam kareye tamamlayarak çarpanlarına ayırabiliriz. $(x \pm c)^2 = x^2 \pm 2cx + c^2$ eşitliğine dikkat ederseniz, eşitliğin sağ tarafındaki $c^2$, $x$'in katsayısı olan $2c$'nin yarısının karesine eşittir. O hâlde $x^2 + bx + c$ üç terimlisini bu yolla çarpanlarına ayırırken $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ ni bir ekleyip bir de çıkarırız.*

**"Tam kareye tamamlama"** yöntemini aşağıdaki gibi geometrik olarak da açıklayabiliriz.



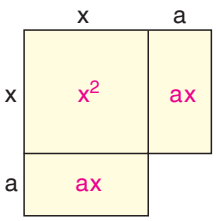

Toplam Alan = $x^2 + 2x$



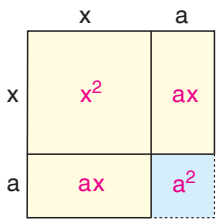

$1^2$ ekleyerek kareye tamamlayalım:

Toplam Alan = $x^2 + 2x + 1^2$

= $(x + 1)^2$




Toplam Alan = $x^2 + 2ax$




$a^2$ ekleyerek kareye tamamlayalım:

Toplam Alan = $x^2 + 2ax + a^2$

= $(x + a)^2$

### 26. Örnek

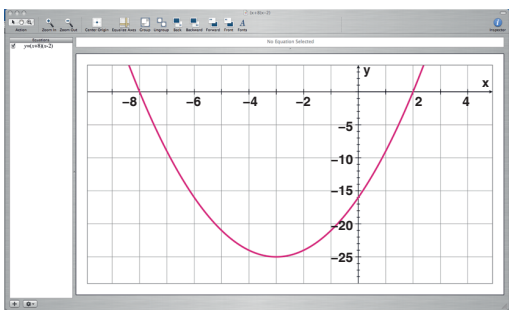
**$x^2 + 6x - 16$ ifadesini tam kareye tamamlama yöntemi ile çarpanlarına ayıralım.**

**Çözüm**

$$x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 - 16 = \underbrace{x^2 + 6x + 9}_{} - 9 - 16$$

$$= (x + 3)^2 - 25$$
$$= (x + 3)^2 - 5^2$$
$$= (x + 3 + 5)(x + 3 - 5) \quad \textit{[İki kare farkı özdeşliği]}$$
$$= (x + 8)(x - 2)$$

Bulduğumuz sonucun doğruluğunu kontrol etmek için bir grafik çizim programı kullanabiliriz. Bunun için önce $y = x^2 + 6x - 16$, sonra da $y = (x + 8)(x - 2)$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı ekranda çizdirelim. Ekranda sadece bir grafik görüldüğünden iki fonksiyonun grafikleri çakışıktır. Bu durum verilen cebirsel ifadenin doğru şekilde çarpanlarına ayrıldığını gösterir.



*$ax^2 + bx + c$ üç terimlilerini çarpanlarına ayırırken $a$ ve $c$'nin çarpanlarına bakarız.*

### $ax^2 + bx + c$'nin Çarpanlarına Ayrılması

*$a = k \cdot t$ ve $c = p \cdot r$ olsun.*

$$\begin{array}{lll} ax^2 + bx + c & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ kx & \longrightarrow & p \\ tx & \longrightarrow & r \end{array}$$

*$k \cdot r + t \cdot p = b$ oluyorsa,*
*$ax^2 + bx + c = (kx + p)(tx + r)$*
*şeklinde çarpanlarına ayrılır.*

**27. Örnek**

**$3x^2 - 2x - 8$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.**

**Çözüm**

3'ün çarpanları : $3 \cdot 1$

$-8$'in çarpanları : $(-4)\cdot 2$, $(-8)\cdot 1$, $4\cdot(-2)$, $8\cdot(-1)$'dir.

Bunları deneyelim:

| 3 | −8 | | 3 | −8 | | 3 | −8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | −4 | | 3 | −8 | | 3 | 4 |
| 1 | 2 | | 1 | 1 | | 1 | −2 |
| $3\cdot 2 + 1\cdot(-4) = 2$ | | | $3\cdot 1 + 1\cdot(-8) = -5$ | | | $3\cdot(-2) + 1\cdot 4 = -2$ | |

b yi yani $-2$ yi üçüncü işlemde bulduk. O hâlde,

$3x^2 - 2x - 8 = (3x + 4)(x - 2)$ şeklinde çarpanlarına ayrılır.

$$\begin{array}{lll} \downarrow & & \downarrow \\ 3x & \longrightarrow & 4 \\ x & \longrightarrow & -2 \end{array}$$

## $ax^2 + bx + c$ Şeklindeki Polinomunun Tam Kareye Tamamlama Yöntemiyle Çarpanlarına Ayrılması

*$ax^2 + bx + c$ şeklindeki üç terimlileri tam kareye tamamlama yöntemi ile çarpanlarına ayırırken önce $a$ parantezine alarak $x^2$'nin katsayısını 1 yaparız. Sonra $x^2 + bx + c$ için uyguladığımız tam kareye tamamlama işlemini yaparız.*

**28. Örnek**

**$P(x) = 3x^2 - 7x + 4$ polinomunu tam kareye tamamlama yöntemi ile çarpanlarına ayıralım.**

**Çözüm**

$$P(x) = 3x^2 - 7x + 4 = 3\left(x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{4}{3}\right) \quad [3 \text{ ortak çarpan parantezine alındı.}]$$

$$= 3\left[x^2 - \frac{7}{3}x + \left(\frac{7}{6}\right)^2 - \left(\frac{7}{6}\right)^2 + \frac{4}{3}\right] \quad \left[\left(\frac{7}{6}\right)^2 \text{ bir eklenip bir çıkarıldı.}\right]$$

$$= 3\left[x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{49}{36} - \frac{49}{36} + \frac{4}{3}\right]$$

$$= 3\left[\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}\right] \quad [\text{Tam kare özdeşliği}]$$

$$= 3 \cdot \left(x - \frac{7}{6} - \frac{1}{6}\right)\left(x - \frac{7}{6} + \frac{1}{6}\right) \quad [\text{İki kare farkı özdeşliği}]$$

$$= 3\left(x - \frac{8}{6}\right)(x - 1)$$

$= (3x - 4)(x - 1)$ bulunur.

## 3.2.5 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

**a.** $x^2 - 2x - 3$ **b.** $x^2 - x - 2$ **c.** $m^2 + 3m - 4$

**ç.** $x^2 + 2x - 8$ **d.** $x^2 - x - 12$ **e.** $a^2 + 2a - 15$

**2.** Aşağıdaki polinomları çarpanlarına ayırınız.

**a.** $P(x) = x^2 - 6x + 5$ **b.** $P(x) = x^2 - 2x - 8$

**c.** $P(x) = x^2 - x - 6$ **ç.** $P(x) = x^2 - 3x + 2$

**d.** $P(x) = x^2 + 2x - 24$ **e.** $P(x) = x^2 + 4x - 12$

**3.** Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

**a.** $2a^2 + 5a - 12$ **b.** $2y^2 + y - 15$ **c.** $2m^2 - 7m - 15$

**ç.** $3x^2 + x - 2$ **d.** $2t^2 + 3t - 5$ **e.** $6a^2 + a - 2$

## Değişken Değiştirme Yöntemi ile Çarpanlara Ayırma

### 29. Örnek

**$P(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ polinomunu çarpanlarına ayıralım.**

**Çözüm**

$x^2 = u$ alınırsa $x^4 = u^2$ olur. Buradan,

$x^4 - 10x^2 + 9 = u^2 - 10u + 9$ elde edilir.

$u^2 - 10u + 9 = (u - 9)(u - 1)$ olduğundan,

$u \quad -9$

$u \quad -1$

$P(x) = x^4 - 10x^2 + 9 = (x^2 - 9)(x^2 - 1)$ $[u = x^2]$

$= (x - 3)(x + 3)(x - 1)(x + 1)$ bulunur.

---

### 30. Örnek

**$P(x) = (x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12$ polinomunu çarpanlarına ayıralım.**

**Çözüm**

$x^2 + x = u$ alınırsa,

$(x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = u^2 - 8u + 12$ elde edilir.

$u^2 - 8u + 12 = (u - 6)(u - 2)$ olduğundan,

$u \quad -6$

$u \quad -2$

$P(x) = (x^2 + x)^2 - 8(x^2 + x) + 12 = (x^2 + x - 6)(x^2 + x - 2)$ $[u = x^2 + x]$

$x \quad +3 \quad x \quad +2$

$x \quad -2 \quad x \quad -1$

$= (x + 3)(x - 2)(x + 2)(x - 1)$ bulunur.

---

### 31. Örnek

**$2^{2x+1} + 7.2^x - 15$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.**

**Çözüm**

$2^x = u$ alınırsa $2^{2x} = (2^x)^2 = u^2$ olur.

$2^{2x+1} + 7 \cdot 2^x - 15 = 2 \cdot 2^{2x} + 7 \cdot 2^x - 15$

$= 2u^2 + 7u - 15$ olur.

$2u^2 + 7u - 15 = (2u - 3)(u + 5)$ olduğundan,

$2u \quad -3$

$u \quad 5$

$2 \cdot 2^{2x} + 7 \cdot 2^x - 15 = (2 \cdot 2^x - 3)(2^x + 5)$ bulunur. $[u = 2^x]$

### 3.2.6 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdaki polinomları çarpanlarına ayırınız.

**a.** $P(x) = x^4 - x^2 - 20$ **b.** $P(x) = x^4 - x^2 - 12$

**c.** $P(x) = (x-2)^4 + (x-2)^2 - 2$ **ç.** $P(x) = (x^2 - 3x)(x^2 - 3x - 8) - 20$

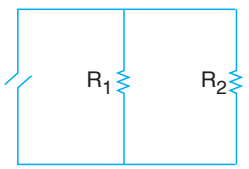
**2.** Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

**a.** $4^x + 2^x - 6$ **b.** $81^x - 6 \cdot 9^x - 27$

## Rasyonel İfadeler

Günlük Hayat Bağlantısı

Bir elektrik devresi, içinden geçen akımın tam bir döngü yapmasını sağlayan kapalı bir devredir. R eş değer direnci göstermek üzere paralel bağlı bir elektrik devresinde eş değer direnç $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ formülü ile bulunur. $R_1 = x + 1$ ohm ve $R_2 = x$ ohm ise eş değer direncin x cinsinden kaç ohm olduğu nasıl bulunabilir? Tartışınız.




*$Q(x) \neq 0$ olmak üzere $\frac{P(x)}{Q(x)}$ biçimindeki ifadelere rasyonel ifadeler denir.*

*Rasyonel ifadelerin pay ve paydalarında bulunan ifadeler çarpanlarına ayrılarak varsa gerekli sadeleştirmeler yapılır.*

**32. Örnek**

**$\frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 9x}$ ifadesinin en sade hâlini bulalım.**

**Çözüm**

$$\frac{x^3-5x^2+6x}{x^3-9x}=\frac{\cancel{x}(x^2-5x+6)}{\cancel{x}(x^2-9)}$$

$$=\frac{\cancel{(x-3)}(x-2)}{\cancel{(x-3)}(x+3)}=\frac{x-2}{x+3}$$

### 3.2.2 Kritik Düşünme

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)=\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$ fonksiyonu ile $g(x)=x+a$ fonksiyonu eşit midir? Neden?

## Rasyonel İfadelerle Toplama ve Çıkarma İşlemleri

**33. Örnek**

**Aşağıdaki işlemleri yapalım.**

**a.** $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x}$

**b.** $\dfrac{2x-3}{4x^2-12x+9}+\dfrac{1}{3x-2}$

**UYARI**

Rasyonel ifadeler toplanırken veya çıkarılırken;

- İfadeler çarpanlarına ayrılarak en sade hâle getirilir.
- Paydalar eşitlenerek ifadeler ortak paydada yazılır.
- Bulunan sonuç tekrar sadeleştirilebiliyorsa sadeleştirilir.

**Çözüm**

**a.** $$\frac{1}{\underset{(x)}{x+1}}+\frac{2}{\underset{(x+1)}{x}}=\frac{x}{x(x+1)}+\frac{2(x+1)}{x(x+1)}$$

$$=\frac{x+2x+2}{x(x+1)}$$

$$=\frac{3x+2}{x(x+1)}$$

**b.** $$\frac{2x-3}{4x^2-12x+9}+\frac{1}{3x-2}=\frac{2x-3}{(2x-3)(2x-3)}+\frac{1}{3x-2}$$

$$=\frac{1}{\underset{(3x-2)}{2x-3}}+\frac{1}{\underset{(2x-3)}{3x-2}}$$

$$=\frac{3x-2+2x-3}{(3x-2)(2x-3)}$$

$$=\frac{5(x-1)}{(3x-2)(2x-3)}$$

**34. Örnek**

$\dfrac{2x}{x^2-3x}-\dfrac{5-x}{x-3}$ **işlemini yapalım.**

**Çözüm**

$$\frac{2x}{x^2-3x}-\frac{5-x}{x-3}=\frac{2x}{x(x-3)}-\frac{5-x}{x-3}$$

$$=\frac{2x}{x(x-3)}-\frac{5x-x^2}{x(x-3)}$$

$$=\frac{2x-(5x-x^2)}{x(x-3)}$$

$$=\frac{x^2-3x}{x(x-3)}$$

$$=\frac{\cancel{x}(x-3)}{\cancel{x}(x-3)}=1 \text{ bulunur.}$$

## 3.2.7 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdaki rasyonel ifadeleri en sade şekilde yazınız.

**a.** $\dfrac{x^2-5x-6}{x^2+4x+3}$ **b.** $\dfrac{x^2-y^2-5x-5y}{x^2-y^2-10y-25}$ **c.** $\dfrac{ab+cd-bc-ad}{bc+ab-dc-ad}$

**ç.** $\dfrac{a^5-a^2b^3-a^3b^2+b^5}{a^4-a^3b-ab^3+b^4}$ **d.** $\dfrac{x^5+x^2}{x^5-x^4+x^2-x}$ **e.** $\dfrac{x^3-y^3}{(x-y)^2+3xy}$

**2.** Aşağıdaki işlemleri yapınız.

**a.** $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ **b.** $1+\dfrac{6}{x-2}+\dfrac{8}{(x-2)^2}$

**c.** $\dfrac{9x}{y^2-3xy}-\dfrac{6}{y-3x}+\dfrac{y}{xy-3x^2}$ **ç.** $\dfrac{x^3-4x^2-5x}{2x^2-3x-5}+\dfrac{x^3}{2x^2-5x}$

**d.** $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3+1}-1$ **e.** $\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1-2x}{1+x}-2$

**f.** $\dfrac{x^3}{x^3+1}+\dfrac{\dfrac{1}{x}}{x^2+\dfrac{1}{x}}$ **g.** $\dfrac{x^3y+x^2y^2+xy^3}{x^3-y^3}-\dfrac{xy^2+xy-x^2y}{x-y}$

## Rasyonel İfadelerle Çarpma İşlemi

**UYARI**

Rasyonel ifadelerle çarpma işlemi yapılırken;

- Verilen ifadeler çarpanlarına ayrılır.
- Sadeleştirmeler varsa yapılır.
- Paylar çarpılıp pay olarak, paydalar çarpılıp payda olarak yazılır.

### 35. Örnek

$\dfrac{10x^2-20x}{x^2+x-6}\cdot\dfrac{x^2-2x-15}{5x^2+15x}$ **ifadesini en sade biçimde yazalım.**

**Çözüm**

$$\frac{10x^2-20x}{x^2+x-6}\cdot\frac{x^2-2x-15}{5x^2+15x}=\frac{2\cdot 5x(x-2)}{(x+3)(x-2)}\cdot\frac{(x-5)(x+3)}{5x(x+3)}$$

$$=\frac{2(x-5)}{x+3}$$ bulunur.

### 36. Örnek

$\dfrac{x^3-27}{x^2+ax+b}\cdot\dfrac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+3x+9}=(x-3)(x+1)$ **ise** $a+b$ **değerini bulalım.**

**Çözüm**

$$\frac{x^3-27}{x^2+ax+b}\cdot\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2+3x+9}=(x-3)(x+1)$$

$$\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x^2+ax+b}\cdot\frac{x^2(x+3)-(x+3)}{x^2+3x+9}=(x-3)(x+1)$$

$$\frac{(x+3)(x^2-1)}{x^2+ax+b}=x+1$$

$$\frac{(x+3)(x-1)(x+1)}{x^2+ax+b}=x+1$$

$x^2+2x-3=x^2+ax+b$ olacağından,

$a=2$, $b=-3$ ve $a+b=2-3=-1$ bulunur.

## Rasyonel İfadelerle Bölme İşlemi

**37. Örnek**

$\left(\frac{a}{a-b}-\frac{a+b}{a}\right):\left(\frac{a}{a+b}-\frac{a-b}{a}\right)$ **işlemini yapalım.**

**Çözüm**

$$\left(\underset{(a)}{\frac{a}{a-b}}-\underset{(a-b)}{\frac{a+b}{a}}\right):\left(\underset{(a)}{\frac{a}{a+b}}-\underset{(a+b)}{\frac{a-b}{a}}\right)$$

$$=\left(\frac{a^2}{a(a-b)}-\frac{a^2-b^2}{a(a-b)}\right):\left(\frac{a^2}{a(a+b)}-\frac{a^2-b^2}{a(a+b)}\right)$$

$$=\frac{a^2-a^2+b^2}{a(a-b)}:\frac{a^2-a^2+b^2}{a(a+b)}$$

$$=\frac{b^2}{a(a-b)}\cdot\frac{a(a+b)}{b^2}=\frac{a+b}{a-b}$$ bulunur.

**UYARI**

Rasyonel ifadelerle bölme işlemi yapılırken birinci ifade aynen alınıp ikinci ifadenin çarpma işlemine göre tersi ile çarpılır. Sonra çarpma işlemindeki adımlar aynen uygulanır.

## 3.2.8 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdaki ifadeleri en sade şekilde yazınız.

**a.** $\frac{x-3}{2x+8}\cdot\frac{x+4}{x^2+2x-15}$

**b.** $\frac{x^2+4x-12}{x^2+7x+10}\cdot\frac{x+5}{2x-4}$

**c.** $\frac{4x-24}{3x+5}:\frac{12x-72}{x+5}$

**ç.** $\frac{x^2+4x}{4x}:\frac{x^2+x-12}{x-3}$

**d.** $\frac{x^2-x-2}{(x+1)^2}\cdot\frac{x^2+4x+3}{x^2+5x+6}$

**e.** $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}:\frac{x^5-x^2y^3}{xy^2-x^3}$

**f.** $\left(\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}\right):\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)$

**g.** $\left(x-\frac{x}{x+\frac{1}{x}}\right)\cdot\left(\frac{x^2-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x}}\right)$

**2.** $\frac{x^2+ax+b}{x^2+5x-6}$ kesrinin sadeleşmiş şekli $\frac{x+3}{x+6}$ ise $a\cdot b$ kaçtır?

# 3.2 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI

**1.** Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

**a.** $24a + 48b$ **b.** $4x^2 + 16$

**c.** $64 - 40xy$ **ç.** $15ab + 30a^2b^2$

**d.** $75x^2y^2 + 60xy^3$ **e.** $18x^2yz^2 - 48xyz^3$

**f.** $(x-y)^2 \cdot (z-y) + (y-x) \cdot (y-z)^2$

**g.** $(a+b)(2a+3b) - a - b$

**ğ.** $(x-y)^2(z-y) + y - x$

**h.** $a^3(b-3a)^2 + a^5(3a-b)$

**ı.** $a^2b + ab^3 - 3a^2b^2$

**i.** $(x+3)(2y+2) - (x-3)(4y+4)$

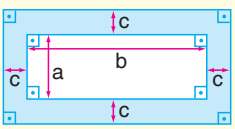
**2.** Bir dışbükey dörtgenin köşegen sayısı 2, bir beşgenin köşegen sayısı 3'tür. Genelleme yapılırsa $n$ kenarlı dışbükey bir çokgenin köşegen sayısı $\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$ formülü ile bulunabilir.

**a.** Bu ifadeyi çarpanlarına ayırınız.

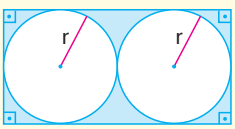
**b.** Bir dokuzgenin kaç köşegeni olduğunu bulunuz.

**3.** Aşağıdaki şekillerde boyalı bölgelerin alanlarını gösteren ifadeleri çarpanlarına ayrılmış hâli ile yazınız.

**a.**




**b.**




**4.** Aşağıdaki polinomları çarpanlarına ayırınız.

**a.** $P(x) = x^2 + 4x + 2x + 8$

**b.** $P(x) = 2x^2 + 3x + 6x + 9$

**c.** $P(x) = 4x^2 - 12x + 2x - 6$

**ç.** $P(x) = x^5 + x(x^3 + 1) + 1$

**5.** Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

**a.** $6ab - 8a + 15b - 20$

**b.** $-6ab + 4a + 18b - 12$

**c.** $12x^2 - 15xy - 16x + 20y$

**ç.** $x^2(x-y) - y^2(y-x) + x^2 + y^2$

**d.** $2x^3a + xa^3 + 8x^2 + 4a^2$

**e.** $6xy - 3ay - 2xb + ab + 2x - a$

**6.** $a \neq 0$ olmak üzere,

$x - y = a$ ve $y + z = \frac{15}{a}$ ise,

$xy - yz - y^2 + xz$

ifadesinin değeri kaçtır?

**7.** $a^{x+y} + a^x b^y - a^y b^x - b^{x+y}$ ifadesini çarpanlarına ayırınız.

**8.** Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

**a.** $4a^4 + 4a^2 + 1$ **b.** $a^4 - a^2$

**c.** $x^2y^2 - 6xy + 9$ **ç.** $9x^2 - 12x + 4$

**d.** $3x^2 - 147$ **e.** $16 - 25x^2$

**f.** $98x^2 - 200y^2$ **g.** $7x^2 - 28y^2$

**ğ.** $a^4 - 8a^2 - 9$ **h.** $(x+2)^2 - (x-2)^2$

**9.** Aşağıdaki ispata göre $2 = 0$ sonucu elde edilmiştir. İspatın kaçıncı adımında neden hata yapıldığını açıklayınız.

**İspat**

(1) $a = 1$ ve $b = 1$ olsun.

(2) $a = b$

(3) $a^2 = b^2$

(4) $a^2 - b^2 = 0$

(5) $(a - b)(a + b) = 0$

(6) $\dfrac{(a-b)(a+b)}{(a-b)} = \dfrac{0}{(a-b)}$

(7) $a + b = 0$

(8) $1 + 1 = 0$

(9) $2 = 0$

**10.** $105 \cdot 125$

işleminin sonucunu iki kare farkı özdeşliğini kullanarak bulunuz.

**11.** $$\frac{142^2 - 58^2 - 60 \cdot 105 + 60 \cdot 21}{5a + 25} = 168$$

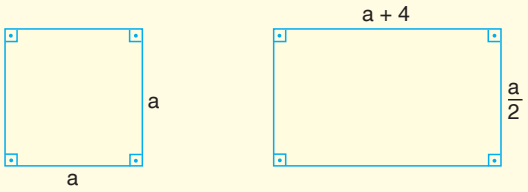
eşitliğini sağlayan $a$ değeri kaçtır?

**12.** Bir dikdörtgenler prizmasının hacmi,

$(x^3y - 20y^2 + 5x^2 - 4xy^3)$ br$^3$ tür.

Bu dikdörtgenler prizmasının ayrıt uzunluklarını katsayıları tam sayı olan iki terimli cebirsel ifadeler şeklinde yazınız.

**13.** Aşağıdaki karenin alanı $16x^2 - 72x + 81$ br$^2$ olduğuna göre dikdörtgenin alanını $x$ cinsinden ifade ediniz.




**14.** $x$ bir gerçek sayı olmak üzere $x^2 - 6x + 12$ ifadesinin alabileceği en küçük değer kaçtır?

**İpucu:** Verilen ifadeyi $(x - a)^2 + b$ şeklinde yazınız.

**15.** $x$ ve $y$ gerçek sayılar olmak üzere,

$4x^2 + y^2 - 12x - 2y + 10 = 0$

eşitliği veriliyor. Buna göre $x + y$ kaçtır?

**İpucu:** **1.** Verilen ifadeyi $(ax + b)^2 + (cx + d)^2 = 0$ şeklinde yazınız.

**2.** $a^2 + b^2 = 0$ ise $a = b = 0$'dır.

**16.** Aşağıdaki polinomları çarpanlarına ayırınız.

**a.** $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

**b.** $P(x) = 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

**c.** $P(x) = x^3 + 1$

**ç.** $P(x) = 27x^3 - 8$

**17.** $a^2 + b^2 = 5$ ve $a \cdot b = 2$ ise $a^3 - b^3$ ifadesinin pozitif değeri kaçtır?

**18.** $a + b = 5$ ve $a \cdot b = 2$ ise $a^3 + b^3$ kaçtır?

**19.** $x = (\sqrt[3]{5} - 1)(\sqrt[3]{5} + 1)$ ise,
$x^3 + 3x^2 + 3x + 3$ ifadesinin değeri kaçtır?

**20.** Aşağıdaki ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a. $x^2 + x - 2$ b. $x^2 + 2x - 3$

c. $x^2 + 2x - 8$ ç. $x^2 - x - 12$

d. $t^2 + 5t - 14$ e. $m^2 - 6m - 27$

f. $3a^2 - 7a - 6$ g. $8y^2 - 2y - 1$

ğ. $3n^2 + 30n + 48$ h. $3x^2 + 8x - 3$

ı. $36m^2 - 33m - 20$ i. $3x^2 - x - 2$

**21.** Aşağıdaki ifadeleri değişken değiştirme yöntemi ile çarpanlarına ayırınız.

a. $x^4 - 5x^2 + 4$

b. $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$

c. $9^x + 3^x - 6$

ç. $x - 5\sqrt{x} + 6$

d. $3^{2x+1} - 5 \cdot 3^x - 2$

**22.** Aşağıdaki rasyonel ifadeleri en sade şekilde yazınız.

a. $\dfrac{3x}{12x(x-1)}$ b. $\dfrac{7x^2 - 21x}{35x^3}$

c. $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 4x - 21}$ ç. $\dfrac{4x^4 + 20x^3 + 25x^2}{4x^2 - 25}$

d. $\dfrac{12x}{4x^2 - 1} \cdot \dfrac{2x^2 + 7x + 3}{24x^3}$

e. $\dfrac{2x + 10}{x^2 - 25} : \dfrac{4x}{2x^2 - 10x}$

f. $\dfrac{x^3 + 3x^2y + 9xy^2}{x^2 + 3xy} : \dfrac{x^3 - 27y^3}{x^2 - 9y^2}$

**23.** Aşağıdaki ifadeleri en sade şekilde yazınız.

a. $\dfrac{8}{3x^3} - \dfrac{5}{12x}$ b. $\dfrac{8x}{x-5} - \dfrac{3x}{x+2}$

c. $\dfrac{1}{5x-3} + \dfrac{x}{6x-5}$ ç. $\dfrac{4}{x^2 - 7x} - \dfrac{3}{x}$

d. $\dfrac{4x}{x^2 - 1} - \dfrac{x+1}{x^2 + 8x + 7}$

e. $\dfrac{x-2}{x^2 - 6x + 9} - \dfrac{x+1}{x^2 + 2x - 15}$

f. $\dfrac{4}{x-2} + \dfrac{3+x}{x+3} + \dfrac{x^2}{2-x}$

# 3. ALT ÖĞRENME ALANI TESTİ

**1.** $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4$

**olduğuna göre $P(2)$ kaçtır?**

A) 20 B) 18 C) 16 D) 15 E) 14

**2.** $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 2$

$Q(x) = 3x^2 - x + 3$

polinomları veriliyor.

**Buna göre $P(x)\cdot Q(x)$ polinomunda $x^3$ lü terimin katsayısı kaçtır?**

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 14

**3.** $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5 - a$

**polinomunun $x$ ile bölümünden kalan 7 olduğuna göre $a$ değeri kaçtır?**

A) –2 B) 0 C) 2 D) 5 E) 12

**4.** $P(x) = (2 - m)x^3 - (m - n + 5)x^2 - \sqrt{5}$

**ifadesi sabit bir polinom olduğuna göre $m\cdot n$ değeri kaçtır?**

A) 2 B) 7 C) 14 D) 16 E) 21

**5.** $P(x) = 4x^3 - 3x^2 + 5x - 7$

polinomu veriliyor.

**Buna göre $P(x)$ polinomunun $x + 1$ ile bölümünden kalan kaçtır?**

A) –20 B) –19 C) –18 D) –16 E) –15

**6.** $P(4x - 1) = 2x^2 - 3x + 4$

polinomu veriliyor.

**$P(x)$ polinomunun $x - 7$ ile bölümünden kalan kaçtır?**

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**7.** $P(x + 2) + P(x - 2) = 6x - 8$

**olduğuna göre $P(3)$ kaçtır?**

A) –5 B) –4 C) 4 D) 5 E) 6

**8.** $P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom olmak üzere $P(x)$ polinomunun $x - 3$ ile bölümünden kalan 6, $Q(x)$ polinomunun $x - 3$ ile bölümünden kalan 4 tür. Buna göre,

$T(x) = x\cdot P(x) - 2\cdot Q(x) + x - 5$

**polinomunun $x - 3$ ile bölümünden kalan kaçtır?**

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

**9.** $P(x)$ polinomunun $x^2+4x$ ile bölümünden elde edilen bölüm $Q(x)$, kalan $2x+7$'dir.

**Buna göre $P(x)$ polinomunun $x+4$ ile bölümünden elde edilen bölüm aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x\cdot Q(x)-1$ B) $x\cdot Q(x)$ C) $x\cdot Q(x)+2$

D) $x\cdot Q(x)+4$ E) $x\cdot Q(x)+7$

**10.** $(x-3)\cdot P(x+1)=2x^2-3x+m+4$

**eşitliği gerçeklendiğine göre $P(x)$ polinomunun $x-2$ ile bölümünden kalan kaçtır?**

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

**11.** $P(x+1)$ polinomu $x-5$ ile bölünebildiğine göre **$P(2x-4)$ polinomu aşağıdakilerden hangisi ile tam bölünebilir?**

A) $x+2$ B) $x+1$ C) $x$ D) $x-4$ E) $x-5$

**12.** $P(x)=(x^2-9)\cdot Q(x)+2x+5$

$Q(x)=(x-2)\cdot T(x)+3$

**eşitlikleri gerçekleştiğine göre $P(2)$ değeri kaçtır?**

A) 6 B) 4 C) 2 D) $-5$ E) $-6$

**13.** Kenar uzunlukları a cm ve b cm olan bir dikdörtgenin çevresi 12 cm'dir. Buna göre,

$P(x)=(ax+b)\cdot(bx+a)$

**polinomunun katsayılar toplamı kaçtır?**

A) 24 B) 32 C) 36 D) 48 E) 64

**14.** $4x^2-12x+t-5$

**ifadesinin bir tam kare olabilmesi için t kaç olmalıdır?**

A) 14 B) 13 C) 12 D) 10 E) 9

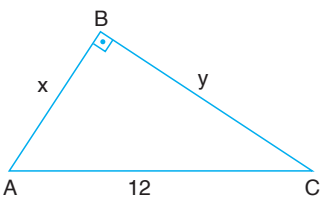
**15.** ABC dik üçgen

$|AC|=12$ br

$|AB|=x$ br

$|BC|=y$ br

$A(\widehat{ABC})=32$ br$^2$




**Yukarıdaki verilere göre $|y-x|$ kaç birimdir?**

A) 2 B) 3 C) 4 D) 6 E) 8

**16.** $1628\cdot1623-1629\cdot1622$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 2

**17.** **Aşağıdakilerden hangisi**

$P(x) = x^6 - x^4 - x^2 + 1$

**polinomunun bir çarpanı değildir?**

A) $(x+1)^2$ B) $(x-1)^2$ C) $x^2 - 1$

D) $(x^2+1)^2$ E) $x - 1$

**18.** $\dfrac{x^5 + x^2}{x^5 - x^4 + x^2 - x}$

**ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\dfrac{x}{x-1}$ B) $\dfrac{1}{x-1}$ C) $\dfrac{1}{x^2-1}$

D) $\dfrac{x}{x^2-1}$ E) $x - 1$

**19.** $\dfrac{x^2 - 3x - 28}{x^2 + mx - 14}$

**ifadesi sadeleştirilebilir bir kesir olduğuna göre m'nin alabileceği değerler toplamı kaçtır?**

A) $-\dfrac{11}{2}$ B) $-\dfrac{9}{2}$ C) $-4$ D) $-\dfrac{7}{2}$ E) $-3$

**20.** $\dfrac{2ab}{b-a} + \dfrac{a^2 + b^2}{a-b}$

**ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) 1 B) $a + b$ C) $\dfrac{2a}{a-b}$ D) $b - a$ E) $a - b$

**21.** $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$

**özdeşliğinden yararlanılarak 640.654 çarpımı aşağıdakilerden hangisi ile ifade edilebilir?**

A) $644^2 - 10^2$ B) $648^2 - 6^2$ C) $647^2 - 7^2$

D) $642^2 - 12^2$ E) $646^2 - 8^2$

**22.** $\dfrac{m \cdot n - \dfrac{m}{n}}{1 + \dfrac{1}{n}} : \dfrac{1-n}{m}$

**ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\dfrac{m^2}{n-1}$ B) $\dfrac{n-1}{m}$ C) $m^2$

D) $-\dfrac{m^2}{n+1}$ E) $-m^2$

**23.** $x(y^2+4) - y(x^2+4)$

**ifadesinin çarpanlarına ayrılmış biçimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $(x+y)\cdot(4-xy)$ B) $(x-y)\cdot(4+xy)$

C) $(x-y)\cdot(4-xy)$ D) $(y-x)\cdot(4-xy)$

E) $4(x-y)\cdot(x+y)$

**24.** $P(x) = x^4 - 2x^2 - 8$

**polinomunun çarpanlarından biri aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x^2 - 2$ B) $x - 4$ C) $x + 2$

D) $x + 4$ E) $x + 8$

**25.** $\sqrt{864 \cdot 884 + 100}$

**işleminin sonucu kaçtır?**

A) 870 B) 874 C) 878 D) 880 E) 896

**26.** $\left(\frac{a}{a+1} + \frac{1}{a-1}\right) : \left(\frac{1}{a+1} - \frac{a}{a-1}\right)$

**işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{a^2-1}{a^2+1}$ B) $a+1$ C) $a-1$ D) 1 E) $-1$

**27.** $a^3 + b^3 = 19$ ve $ab \cdot (a+b) = -6$

**olduğuna göre $a+b$ ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 9 B) 8 C) 3 D) 2 E) 1

**28.** $x = \sqrt[3]{5} + 1$ olmak üzere,

$x^3 - 3x^2 + 3x - 3$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 3

**29.** $\frac{(y-x)^2 - (x-y)^3}{(x+y)^2 - 4xy} : \frac{4x^2 - 4xy - 4x}{8xy}$

**ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-2y$ B) $-y$ C) $-\frac{2}{y}$ D) $-\frac{1}{y}$ E) $2y$

**30.** $x - \frac{1}{x} = 5$ olduğuna göre,

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

**ifadesinin değeri kaçtır?**

A) 23 B) 27 C) 29 D) 30 E) 32

**31.** Aşağıdakilerden hangisi $P(x) = 9x^4 - 10x^2 + 1$ **polinomunun çarpanlarından biri değildir?**

A) $3x + 1$ B) $3x - 1$ C) $x + 1$

D) $x - 1$ E) $x - 3$

**32.** $\frac{1}{b^2} \cdot \left(\frac{15a - 20b}{9a^2 - 16b^2} : \frac{3a^2 - 11ab - 20b^2}{(3ab + 4b^2)^2}\right)$

**ifadesinin sadeleştirilmiş biçimi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\frac{1}{b^2}$ B) $\frac{1}{a-5b}$ C) $\frac{3a+4b}{a-5b}$

D) $\frac{5}{a-5b}$ E) $\frac{3a-4b}{a-5b}$

# 4. ALT ÖĞRENME ALANI

# İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

## Konular

**4.1 İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler**

*İkinci dereceden denklemler hem günlük hayatta hem de birçok meslek alanında sıkça kullanılır. Örneğin bir fizikçi yukarı doğru fırlatılan topun yerden yüksekliğini modellerken, bir elektrik mühendisi paralel bağlı elektrik devresinde direnci hesaplarken, bir yönetici şirketinin satışını yaptığı ürünlerden maksimum kârı nasıl elde edebileceğini hesaplarken, bir mimar asma köprüyü tasarlarken ikinci derece denklemlerden faydalanır.*

# Hazır mısınız?

**4. Alt Öğrenme Alanı**

**1.** Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümelerini bulunuz.

**a.** $2(x-1)-5=3x+1$

**b.** $2-2x=3(1-x)+3x$

**2.** $2x-3=3ax-7$

denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi $Ç=\{2\}$ olduğuna göre a kaçtır?

**3.** $(m+2)x-3=-3x+2$

denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi $Ç=\varnothing$ ise m kaçtır?

**4.** $(m+2)x=3x+5+n$

denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi sonsuz elemanlı ise $m+n$ kaçtır?

**5.** Aşağıdaki cebirsel ifadeleri ortak çarpan parantezine alma yöntemiyle çarpanlarına ayırınız.

**a.** $x^2-4x$

**b.** $9y^2-3y$

**c.** $5x+30y$

**ç.** $x^5y-x$

**d.** $15a^2y-30ay$

**e.** $10x^2-14xy-15x+21y$

**6.** Aşağıdaki cebirsel ifadeleri tam kare özdeşliğini kullanarak çarpanlarına ayırınız.

**a.** $4y^2-12y+9$

**b.** $\frac{x^2}{9}-\frac{2xy}{3}+y^2$

**c.** $(a+b)^2+2(a+b)+1$

**ç.** $a^2b+8ab^2+16b^3$

**d.** $2m^3-28m^2+98m$

**7.** Aşağıdaki cebirsel ifadeleri iki kare farkı özdeşliğini kullanarak çarpanlarına ayırınız.

**a.** $1-x^4$

**b.** $25-9a^2b^2$

**c.** $\frac{x^4}{4}-49$

**ç.** $\frac{x^4}{9}-\frac{m^2n^4}{4}$

**d.** $(x-3)^2-(x+2)^2$

**e.** $9a^2-6a+1-b^2$

KONU 4.1

# İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

## İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Çözümü

Günlük Hayat Bağlantısı

Isaac Newton'ın *(Ayzık Nüvtın)* bahçede elma ağacının altında otururken kafasına elma düştüğünü ve bu olayın sonucunda yer çekiminin varlığını fark ettiğini duymuşsunuzdur. Biz bu hikâyeyi biraz değiştirelim:

Newton uzanmış, ağaçtaki elmaları seyrederken bir elmanın dalından koptuğunu görür ve bu elma başına düşmeden yerinden kalkması gerektiğini fark eder. Düşen elmanın, yerden yaklaşık 5 metre yükseklikteki bir daldan koptuğunu varsayarsak elmanın koptuktan t saniye sonra yerden yüksekliğini, $y = -5t^2 + 5$ eşitliği ile gösterebiliriz. Bu durumda elmanın yere düştüğü ana kadar geçecek zamanı bulmak için $-5t^2 + 5 = 0$ denklemini çözmemiz gerekir. Bu denklem nasıl çözülebilir? Sizce Newton, elma kafasına düşmeden önce kalkabilir mi? Neden?

**Neler Öğreneceğiz?**

- İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri ve bu denklemlerin köklerini bulmayı
- Diskriminantı
- Sanal birimi
- Karmaşık sayıyı
- Karmaşık sayıların eşleniğini
- İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin kökleri ile katsayıları arasındaki ilişkiyi

*$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ biçimindeki eşitliklere ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem denir. Eğer varsa $x$ yerine yazıldığında bu eşitliği sağlayan gerçek sayılara denklemin kökleri, köklerin oluşturduğu kümeye de denklemin çözüm kümesi denir.*

*İkinci Dereceden Denklem*

### 1. Örnek

**Aşağıdaki ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin katsayılarını belirleyelim.**

**a.** $2x^2 - 3x + 1 = 0$ denkleminde; **a = 2, b = −3, c = 1**'dir.

**b.** $-x^2 + 4 = 0$ denkleminde; **a = −1, b = 0, c = 4**'tür.

**c.** $x^2 = 0$ denkleminde; **a = 1, b = 0, c = 0**'dır.

### 4.1.1 Kritik Düşünme

$(a-1)x^2 - x^{b+1} - x + 3 = 0$

denklemi $x$'e bağlı ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre,

I. $a = 1$ ise $b = 1$ olmalıdır.

II. $a \neq 1$ ise $b = -1$ olmalıdır.

III. $a = 2$ ise $b = 1$ olmalıdır.

ifadelerinden hangileri daima doğrudur?

## İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Tarihsel Gelişimi

Denklemler konusunda ilk önemli adımların Babilliler tarafından atıldığı bilinmektedir. Bu konudaki en eski yazılı belge MÖ 1700'lü yıllardan önce yaşadığı sanılan Mısırlı Ah-nes'in çalışmalarını içeren Rhind Papirüsü'dür. MÖ 2000'li yıllarda Mezopotamyalılar ikinci dereceden denklemlerin pozitif kökünü bulmak için bir algoritma geliştirmişlerdir. MÖ 300'lü yıllarda Yunanlılar ikinci dereceden bir denklemi geometrik yöntemlerle çözebiliyorlardı. Bu dönemde "denklem" kavramı henüz gelişmemişti, günlük yaşamda karşılaşılan problemlerden dolayı ortaya çıkan, dolayısıyla pozitif kökleri (genellikle bir uzunluk) olan denklemlerle uğraşılırdı.

500'lü yıllardan itibaren Hintliler ikinci dereceden denklemlerin her iki kökünü bulmayı biliyorlardı. Archimedes'in de uğraştığı $y^2 = ax^2 + 1$ tipindeki denklemler için Hintli matematikçi Brahmagupta ve Bhaskara ilk defa genel çözüm yöntemleri ortaya koymuşlardır.

Objektif yaklaşımla yazılmış matematik tarihi eserleri incelendiğinde ikinci dereceden denklemlere ait temel bilgilerin birçoğunun 8 ve 16. yüzyıl Türk-İslam dünyası alimleri tarafından ilk olarak ortaya konulduğu ve belli bir noktaya kadar da geliştirildiği görülmektedir. Genel kabülle Ortaçağ İslam dünyasının en büyük bilimsel yeteneklerinden biri olan Harezmî, ikinci dereceden denklemlerin çözümünde geometrik modeller kullanmıştır. İkinci dereceden denklemlerin çözümünü çok sade, anlaşılır ve sistematik biçimde yazmıştır. Günümüzde hala ikinci dereceden denklemlerin çözümünde Harezmî'nin çözüm yöntemleri kullanılır.

Abdulhamid İbn Türk, Harezmî ile aynı çağda yaşamış Türk müslüman matematikçidir. Günümüze ulaşan kitapları incelendiğinde ikinci dereceden denklemlerin çözümlerini Harezmî'den daha ayrıntılı olarak incelediği görülmektedir. Örneğin $x^2 + c = bx$ şeklindeki denklemleri Harezmî tek bir şekilde çözmüşken, Abdulhamid İbn Türk bu denklemlerin farklı çözümlerini birden çok şekille göstermiştir.

*Genel ağdan alınmıştır.*

## $ax^2 + c = 0$ Denkleminin Çözümü

- *$ax^2 + c = 0$ denklemi çözülürken $x^2$ yalnız bırakılarak $x^2 = -\frac{c}{a}$ elde edilir. Denklemin kökleri, karesi $-\frac{c}{a}$ ya eşit olan sayılardır.*
- *$\frac{c}{a} > 0$ ise denklemin gerçek kökleri yoktur.*

### 2. Örnek

**$-5x^2 + 5 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.**

**Çözüm**

**1. Yol**

$-5x^2 + 5 = 0 \Rightarrow -5x^2 = -5$

$\Rightarrow x^2 = 1$

$\Rightarrow x_1 = -1 \text{ v } x_2 = 1$

Çözüm kümesi Ç = {−1, 1}'dir.

**2. Yol**

$-5x^2 + 5 = 0 \Rightarrow -5(x^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow (x - 1)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow x - 1 = 0 \text{ v } x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = 1 \text{ v } x = -1$

Çözüm kümesi Ç = {−1, 1}'dir.

### 3. Örnek

**Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulalım.**

**a.** $x^2 + 3 = 0$ **b.** $7x^2 = 0$

**Çözüm**

**a.** $x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -3$

Hiçbir gerçek sayının karesi negatif olmadığı için bu denklemi sağlayan x gerçek sayısı bulunamaz.

Ç = ∅'dir.

**b.** $7x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ v } x_2 = 0$

O hâlde Ç = {0}'dır.

## $ax^2 + bx = 0$ Denkleminin Çözümü

*$ax^2 + bx = 0$ denklemi çözülürken verilen ifade $x$ parantezine alınarak $x.(ax + b) = 0$ biçimine getirilir. Elde edilen çarpanların her biri sıfıra eşitlenerek çözüm kümesi bulunur.*

## 4. Örnek

**Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulalım.**

**a.** $9 - 16x^2 = 0$ **b.** $x^2 - \frac{4}{9} = 0$

**Çözüm**

**a.**
$$9 - 16x^2 = 0$$
$$3^2 - (4x)^2 = 0$$
$$(3 - 4x) \cdot (3 + 4x) = 0$$
$$3 - 4x = 0 \ \text{v} \ 3 + 4x = 0$$
$$x = \frac{3}{4} \ \text{v} \ x = -\frac{3}{4}$$

O hâlde $Ç = \left\{-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right\}$'dir.

**b.**
$$x^2 - \frac{4}{9} = 0$$
$$x^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0$$
$$\left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right) = 0$$
$$x - \frac{2}{3} = 0 \ \text{v} \ x + \frac{2}{3} = 0$$
$$x = \frac{2}{3} \ \text{v} \ x = -\frac{2}{3} = 0$$

O hâlde $Ç = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$'dir.

### 4.1.2 Kritik Düşünme

***Tablo:*** Yönergeler ve İşlemler

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $x = y$ olduğunu varsayalım. | $x = y$ |
| 2 | Eşitliğin her iki tarafını $x$ ile çarpalım. | $x^2 = xy$ |
| 3 | Eşitliğin her iki tarafından $y^2$ yi çıkaralım. | $x^2 - y^2 = xy - y^2$ |
| 4 | Eşitliğin her iki tarafını çarpanlarına ayıralım. | $(x + y)(x - y) = y(x - y)$ |
| 5 | Eşitliğin her iki tarafını $x - y$ ile bölelim. | $x + y = y$ |
| 6 | Eşitlikte $x$ yerine $y$ yazalım. | $2y = y$ |
| 7 | Eşitliğin her iki tarafını $y$ ile bölelim. | $2 = 1$ |

Yukarıdaki tabloda verilen işlemleri inceleyerek ilk kez hangi adımda yanlışlık yapıldığını nedenleriyle açıklayınız.

**UYARI**

**Kavram Yanılgısı**

"5. Örnek"in a maddesindeki denklemi çözerken eşitliğin her iki tarafını $x$ ile bölme eğiliminde olabilirsiniz. Ancak unutmayın ki $x$ bir değişkendir ve $x = 0$ için bu işlem ifadeyi tanımsız yapacağından yanlış olur.

Yani bir denklemi çözerken eşitliğin iki tarafını $x$ değişkeni içeren bir ifadeye bölemeyiz.

## 5. Örnek

**Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulalım.**

**a.** $x^2 = 5x$ **b.** $3x^2 + 4x = 0$

**Çözüm**

**a.**
$$x^2 = 5x \Rightarrow x^2 - 5x = 0$$
$$\Rightarrow x(x - 5) = 0$$
$$\Rightarrow x = 0 \ \text{v} \ x - 5 = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0 \ \text{v} \ x_2 = 5$$

O hâlde $Ç = \{0, 5\}$'tir.

**b.**
$$3x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(3x + 4) = 0$$
$$\Rightarrow x = 0 \ \text{v} \ 3x + 4 = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = 0 \ \text{v} \ x_2 = -\frac{4}{3}$$

O hâlde $Ç = \left\{-\frac{4}{3}, 0\right\}$'dır.

## 4.1.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdaki denklemlerden, ikinci dereceden olanları belirleyerek a, b, c katsayılarını bulunuz.

**a.** $2x^2 + x - 1 = 0$ **b.** $x^3 + 2x^2 = 0$ **c.** $3x^2 - 4 = 0$

**ç.** $x^4 - x^2 + x = 0$ **d.** $4x + 7 = 0$ **e.** $4x^2 + x = 0$

**2.** Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümelerini bulunuz.

**a.** $x^2 - 1 = 0$ **b.** $x^2 + 1 = 0$ **c.** $4 - 9x^2 = 0$

**ç.** $\frac{x^2}{16} - \frac{1}{25} = 0$ **d.** $x^2 = \frac{3x^2}{4} + \frac{4}{9}$ **e.** $\frac{x}{4} + \frac{9}{x} = x$

**3.** Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümelerini bulunuz.

**a.** $x^2 - x = 0$ **b.** $4x^2 + 8x = 0$ **c.** $x(x-1) + x^2 = 0$

**ç.** $x^2 + \frac{1}{4}x = 0$ **d.** $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x = 0$ **e.** $1 - 3x = \frac{4}{1-3x}$

### 6. Örnek

**$x^2 + 2x - 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.**

**Çözüm**

**1. Yol:** Tam kareye tamamlayarak çözelim:

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \underbrace{x^2 + 2x + 1} - 1 - 3 = 0$

$\Rightarrow (x+1)^2 - 4 = 0$ *[Tam Kare Özdeşliği]*

$\Rightarrow (x+1)^2 - 2^2 = 0$

$\Rightarrow (x+1-2)(x+1+2) = 0$ *[İki Kare Farkı Özdeşliği]*

$\Rightarrow (x-1)(x+3) = 0$

$\Rightarrow x - 1 = 0 \vee x + 3 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = -3$ bulunur.

O hâlde Ç = {−3, 1}'dir.

**2. Yol:** Çarpanlarına ayırarak çözelim.

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$x \longrightarrow +3$

$x \longrightarrow -1$

$(+3)\cdot(-1) = -3$ ve $(+3) + (-1) = 2$ olduğundan,

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x + 3 = 0 \vee x - 1 = 0$

$\Rightarrow x_1 = -3 \vee x_2 = 1$ bulunur.

O hâlde Ç = {−3, 1}'dir.

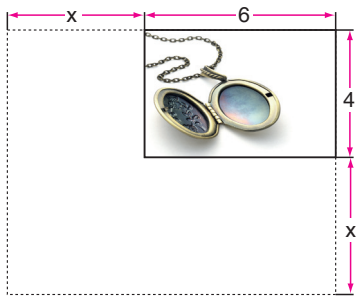
## 7. Örnek

PROBLEM ÇÖZME

Bir derginin editörü, boyutları 6 cm ve 4 cm olan dikdörtgen şeklindeki bir fotoğrafın boyutlarını aynı miktarda büyüterek alanını iki katına çıkartıp dergiye bu hâliyle koymak istiyor.

**Buna göre dergiye koyulacak fotoğrafın boyutları kaç cm olmalıdır?**

### Çözüm




Problemde verilenleri yukarıdaki gibi modelleyebiliriz.

Fotoğrafın her iki boyutu x cm uzatılsın. Bu durumda fotoğrafın yeni alanını aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$\overbrace{(x+6)}^{\text{Yeni Uzunluk}} \cdot \overbrace{(x+4)}^{\text{Yeni Genişlik}} = \overbrace{2 \cdot 6 \cdot 4}^{\text{Yeni Alan}}$$

Önceki Alan

Bu denklemi çözelim:

$$(x+6)\cdot(x+4) = 2\cdot 6\cdot 4 \Rightarrow x^2 + 10x + 24 = 48$$

$$\Rightarrow x^2 + 10x - 24 = 0$$

*(Çarpımları −24, toplamları 10 olan iki sayı 12 ve −2 dir.)*

$$\Rightarrow (x+12)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x + 12 = 0 \quad \text{v} \quad x - 2 = 0$$

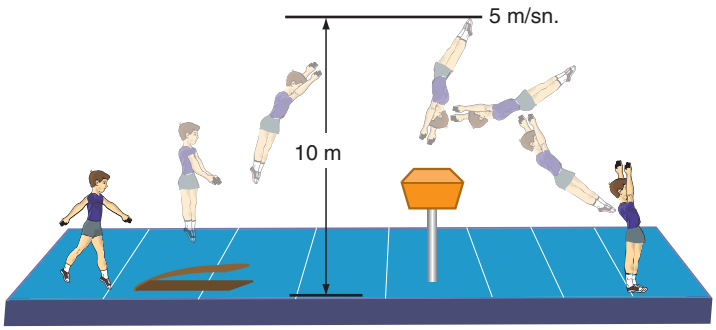
$$\Rightarrow \quad x_1 = -12 \ \text{v} \quad x_2 = 2 \ \text{bulunur.}$$

Denklemin çözüm kümesi $Ç = \{-12, 2\}$ olmasına rağmen uzunluk negatif olamayacağından $x = 2$'dir.

Fotoğrafın yeni boyutları $6 + 2 = 8$ cm ve $4 + 2 = 6$ cm olmalıdır.

## $ax^2 + bx + c = 0$ Denkleminin Çözümü

**8. Örnek**




Sıçrama hareketi yapan bir jimnastikçinin kasayı terk ettikten sonra ulaştığı en yüksek noktada ayaklarının yerden yüksekliği 10 m ve dikey hızı 5 m/sn.dir.

**Buna göre jimnastikçinin ayakları en yüksek noktaya ulaştığı andan kaç saniye sonra yere değer?** *(Düşey atış hareketinde $t$ saniye, $V_0$ m/sn. ve $h_0$ metre cinsinden olmak üzere yerden yüksekliği veren $h = -5t^2 + V_0t + h_0$ formülünü kullanınız.)*

**Çözüm**

$h = -5t^2 + V_0t + h_0$ *[Düşey atışta yükseklik formülü]*

$0 = -5t^2 + 5t + 10$ *[$V_0 = 5$ m/sn., $h_0 = 10$ m, $h = 0$ m]*

$0 = -5(t^2 - t - 2)$ *[$-5$ ortak çarpan parantezine alındı.]*

$0 = t^2 - t - 2$ *[Eşitliğin her iki tarafı $-5$'e bölündü.]*

$0 = (t - 2)(t + 1)$ *[Cebirsel ifade çarpanlarına ayrıldı.]*

$t - 2 = 0$ v $t + 1 = 0$ *["$a.b = 0 \Rightarrow a = 0$ v $b = 0$" kuralı uygulandı.]*

$t_1 = 2$ v $t_2 = -1$ bulunur.

Geçen süre negatif değer alamayacağından $t = 2$'dir.

O hâlde jimnastikçinin ayakları 2 sn. sonra yere değer.

**UYARI**

$a < 0$ olduğunda $ax^2 + bx + c$ şeklindeki üç terimliyi çarpanlarına ayırırken eksi parantezine almak yapılacak işlemleri kolaylaştırır.

### 4.1.2 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdaki üç terimlileri tam kareye tamamlama yöntemi ile çarpanlarına ayırınız.

**a.** $2a^2 - 5a - 7$ **b.** $3x^2 + 2x - 8$ **c.** $4b^2 - 6b + 2$

**ç.** $6x^2 - x - 12$ **d.** $4m^2 + 11m - 3$ **e.** $6x^2 + 5x - 6$

**2.** Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümelerini bulunuz.

**a.** $x^2 - 4x + 3 = 0$ **b.** $x^2 - 6x - 7 = 0$ **c.** $x^2 - x - 6 = 0$

**ç.** $x^2 = 5 - 4x$ **d.** $x^2 - 3x = 18$ **e.** $-x = x^2 - 20$

**3.** Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümelerini bulunuz.

**a.** $10x^2 - 9x + 2 = 0$ **b.** $7x^2 + 9x + 2 = 0$ **c.** $-x^2 + 5x - 6 = 0$

**ç.** $16x^2 - 8x + 1 = 0$ **d.** $12x^2 + x - 6 = 0$ **e.** $-10x^2 + 7x - 1 = 0$

**4.** A ve B otobüsleri aynı anda şehir otogarından, biri kuzey, diğeri de doğu yönünde hareket ediyor. B otobüsü, A otobüsünden saatte 5 km daha fazla hız yapmaktadır. Hareketlerinden 2 saat sonra iki otobüs birbirlerinden 50 km uzaklıktadır. Buna göre her iki otobüsün hızlarını bulunuz.

**İpucu:** Pisagor teoremini kullanınız.

## İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Köklerinin Varlığı ve Diskriminantı

İkinci dereceden her denklemin köklerini, çarpanlara ayırma yöntemi ile bulmak kolay olmayabilir. Bunun için tam kareye tamamlama yöntemini kullanarak $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ denkleminin köklerini kolaylıkla bulmamızı sağlayan bir bağıntı elde edelim.

$ax^2 + bx + c = 0$ ve $a \neq 0$ olsun.

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

*($x^2 + \frac{b}{a}x$ ifadesini tam kareye tamamlamak için $\frac{b}{a}$'nın yarısının karesi, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ ifadesine eklenip çıkarılır.)*

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}\right) = 0$$

$$a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = 0$$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = 0$$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0$$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right] = 0 \qquad (b^2 - 4ac \geq 0 \ \wedge \ a > 0\text{'dır.})$$

İki Kare Farkı

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\right] = 0$$

**Tarih Kutusu**

**El Harezmî**

**(780–850)**

*(Temsilî resimdir.)*

Muhammed İbni Musa el–Harezmî, MS 830'lu yıllarda "Cebir ve Karşılaştırma Hesabı" isimli bir kitap yazmış ve bu kitap matematiğin cebir olarak bilinen dalına adını vermiştir. El-Harezmî ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin köklerini bulurken tam kareye tamamlama yöntemini kullanan ilk matematikçidir.

*Genel ağdan alınmıştır.*

$$a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$$

$$x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0 \quad \text{v} \quad x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$$

$$\mathbf{x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \quad \text{v} \quad \mathbf{x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \quad \text{bulunur.}$$

*($b^2 - 4ac \geq 0$ olmak üzere $a < 0$ için de $x_1$ ve $x_2$ değerlerinin aynı olduğunu gösteriniz.)*

- *$b^2 - 4ac$ ifadesine $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin diskriminantı denir ve $\Delta$ işareti ile gösterilir.*
- *$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri,*

$$x_{1,2}=\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}\text{'dır.}$$

**9. Örnek**

**Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümelerini bulalım.**

**a.** $x^2 - 2x - 2 = 0$ **b.** $2x^2 + 3x - 1 = 0$

**Çözüm**

**a.** $x^2 - 2x - 2 = 0$ için;

$a = 1,\ b = -2,\ c = -2,$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 12$'dir.

$$x_{1,2}=\frac{-(-2)\mp\sqrt{12}}{2.1}$$

$$x_{1,2}=\frac{2\mp 2\sqrt{3}}{2}$$

$$x_{1,2}=1\mp\sqrt{3}$$

$Ç = \{1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}\}$ olur.

**b.** $2x^2 + 3x - 1 = 0$ için;

$a = 2,\ b = 3,\ c = -1,$

$\Delta = 3^2 - 4\cdot 2\cdot(-1) = 17$'dir.

$$x_{1,2}=\frac{-3\mp\sqrt{17}}{2\cdot 2}$$

$$x_{1,2}=\frac{-3\mp\sqrt{17}}{4}$$

$$Ç=\left\{\frac{-3-\sqrt{17}}{4},\ \frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right\} \text{ olur.}$$

$ax^2 + bx + c = 0$ *ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem ve* $\Delta = b^2 - 4ac$ *olmak üzere,*

1. $\Delta > 0$ *ise* $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}$ *olacağından denklemin farklı iki gerçek kökü vardır.*
   *Bu kökler* $x_{1,2} = \dfrac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$ *bağıntısı ile bulunur.*
2. $\Delta = 0$ *ise* $\sqrt{\Delta} = 0$ *olacağından denklemin eşit iki gerçek kökü vardır.*
   *Bu kökler* $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$ *bağıntısı ile bulunur.*
3. $\Delta < 0$ *ise* $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$ *olacağından denklemin gerçek kökü yoktur. Gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi boş kümedir.*

**10. Örnek**

**$x^2 - 2x + 5 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.**

**Çözüm**

Verilen denklemde $a = 1$, $b = -2$ ve $c = 5$'tir.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$

$\Delta < 0$ olduğundan denklemin gerçek kökü yoktur. Ç = $\varnothing$'dir.

## 4.1.3 Öğrendiğimizi Uygulayalım

1. Aşağıdaki denklemleri çözmeden, diskriminantlarını bularak gerçek sayılar kümesinde köklerinin olup olmadığını araştırınız.

   a. $x^2 - 7x + 3 = 0$
   b. $2x^2 - x - 5 = 0$
   c. $3x^2 + x + 5 = 0$
   ç. $25x^2 - 30x + 9 = 0$
   d. $x^2 - 14x + 49 = 0$
   e. $x^2 - 2x + 7 = 0$

2. Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümelerini $\Delta$'ya bakarak bulunuz.

   a. $x^2 - 4x + 4 = 0$
   b. $4x^2 - 12x + 9 = 0$
   c. $(x + 1)^2 + (x - 2)^2 = 8$
   ç. $x(x - 1) + x \cdot (x - 2) + 1 = 0$
   d. $(x - 2)(x + 4) + 1 = 0$
   e. $4(x - 1)^2 - 9 = 0$

## Değişken Değiştirme Yöntemi ile Denklem Çözümü

### 11. Örnek

**$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.**

**Çözüm**

$x^2 = t$ alınırsa denklem, $t^2 - 5t + 4 = 0$ olur.

$t^2 - 5t + 4 = 0$ denklemini çözelim.

$t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow (t - 4) \cdot (t - 1) = 0$

$t \rightarrow -4 \quad \Rightarrow t - 4 = 0 \vee t - 1 = 0$

$t \rightarrow -1 \quad \Rightarrow t = 4 \vee t = 1$ bulunur.

Bulduğumuz t değerlerini $x^2 = t$'de yerine koyalım.

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ ve

$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ olur.

O hâlde $Ç = \{-2, -1, 1, 2\}$ bulunur.

### 12. Örnek

**$(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.**

**Çözüm**

$x^2 - x = t$ alınırsa denklem $t^2 - 8t + 12 = 0$ olur.

$t^2 - 8t + 12 = 0$ denklemini çözelim.

$t^2 - 8t + 12 = 0 \Rightarrow (t - 6) \cdot (t - 2) = 0$

$t \rightarrow -6 \quad \Rightarrow t - 6 = 0 \vee t - 2 = 0$

$t \rightarrow -2 \quad \Rightarrow t = 6 \vee t = 2$ bulunur.

Bulduğumuz t değerlerini $x^2 - x = t$'de yerine koyalım.

$x^2 - x = 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3) \cdot (x + 2) = 0$

$x \rightarrow -3 \quad \Rightarrow x - 3 = 0 \vee x + 2 = 0$

$x \rightarrow 2 \quad \Rightarrow x = 3 \vee x = -2$ bulunur.

$x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2) \cdot (x + 1) = 0$

$x \rightarrow -2 \quad \Rightarrow x - 2 = 0 \vee x + 1 = 0$

$x \rightarrow 1 \quad \Rightarrow x = 2 \vee x = -1$ bulunur.

O hâlde çözüm kümesi $Ç = \{-2, -1, 2, 3\}$ bulunur.

### 4.1.4 Öğrendiğimizi Uygulayalım

Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümelerini bulunuz.

**a.** $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ **b.** $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

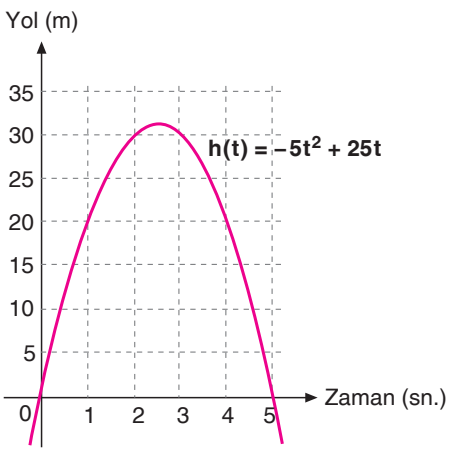
**c.** $(x^2 - 1)^2 - 4(x^2 - 1) + 3 = 0$

## Karmaşık Sayılar

25 m/sn. hızla yerden havaya dikey olarak fırlatılan bir cismin t saniye sonra yerden yüksekliğini [h(metre)] bulmak için $h(t) = -5t^2 + 25t$ fonksiyonunu kullanabiliriz.

$y = h(t)$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. Grafiğe göre cisim, 30 m yüksekliğe t = 2. sn. ya da t = 3. sn.de ulaşır, yani $h(t) = 30$ denkleminin kökleri $t_1 = 2$ ve $t_2 = 3$'tür.

Peki grafiğe göre cisim, 40 m yüksekliğe çıkabilir mi? Bu durumda $h(t) = 40$ denkleminin kökleri için ne söyleyebilirsiniz?




**Tarih Kutusu**

Bildiğiniz gibi gerçek sayılar, rasyonel sayılar ile irrasyonel sayıların birleşiminden oluşur.

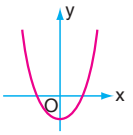
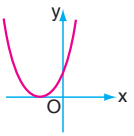
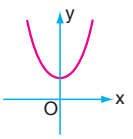
Bir dik üçgenin dik kenarlarının uzunluklarının kareleri toplamı, hipotenüs uzunluğunun karesine eşittir. Bu teorem Antik Yunanlı matematikçi Pythagoras [(Pisagor) MÖ 570–MÖ 495] tarafından bulunmuştur ve onun adı ile anılır. Pisagor bu teoremi keşfettiğinde irrasyonel sayılar bilinmiyordu. Pisagor'un öğrencilerinden Hippasus (Hipasus) Pisagor teoremi ile ilgili çalışmalar yaparken $\sqrt{2}$ sayısıyla karşılaşır ve bu sayının rasyonel sayı olmadığını ispat eder. Böylece irrasyonel sayıların varlığı keşfedilir.

*Genel ağdan alınmıştır.*

Bu konuya kadar matematik derslerinde gerçek sayıları kullandık. Belli türdeki denklemlerin çözüm kümelerini bulmak için bilinen sayı kümelerini genişleterek yeni sayı kümeleri elde ettik.

- $x + 2 = 0$ biçimindeki bir denklemi çözmek için doğal sayılar kümesini $(\mathbb{N})$ genişleterek tam sayılar kümesini $(\mathbb{Z})$,
- $2x - 1 = 0$ biçimindeki bir denklemi çözmek için tam sayılar yetersiz kalınca rasyonel sayılar kümesini $(\mathbb{Q})$,
- $x^2 - 5 = 0$ biçimindeki denklemleri çözmek için rasyonel sayılar kümesini genişleterek gerçek sayılar kümesini $(\mathbb{R})$ tanımlamıştık.

Ayrıca $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin diskriminantı $(\Delta = b^2 - 4ac)$ ile kökleri $\left(x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ arasındaki ilişkinin tablodaki gibi olduğunu öğrenmiştik.

| Diskriminantı ($\Delta$) | Kökleri | Grafiği |
|---|---|---|
| $b^2 - 4ac > 0$ | Denklemin farklı iki gerçek kökü vardır. |  |
| $b^2 - 4ac = 0$ | Denklemin eşit iki kökü (çift kat kökü) vardır. |  |
| $b^2 - 4ac < 0$ | Denklemin gerçek kökü yoktur. |  |

$\Delta < 0$ durumuna uyan denklemlerin gerçek sayı olmayan köklerini bulmak için gerçek sayılar kümesini genişleterek yeni bir sayı kümesi tanımlamamız gerekir.

Örneğin $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ dir. Karesi $-1$'e eşit olan gerçek sayı olmadığından bu denklemin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi $\varnothing$'dir.

$x^2 + 1 = 0$ denklemini çözebilmemiz için karesi negatif sayı olabilen sayılara ihtiyaç vardır. Bu bölümde bu tür sayıları *(karmaşık sayıları)* öğreneceksiniz.

### Sanal (İmajiner) Sayı Birimi

*$\sqrt{-1}$ sayısına sanal (imajiner) sayı birimi denir. $i = \sqrt{-1}$ veya $i^2 = -1$ şeklinde gösterilir.*

**14. Örnek**

**Aşağıdaki sayı ve ifadeleri sanal sayı birimi ile yazalım.**

**a.** $\sqrt{-4}$ **b.** $\sqrt{-24}$ **c.** $\sqrt{-9x^5}$

**Çözüm**

**a.** $\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$

**b.** $\sqrt{-24} = \sqrt{24 \cdot (-1)} = \sqrt{24} \cdot \sqrt{-1} = 2\sqrt{6}\,i$

**c.** $\sqrt{-9x^5} = \sqrt{9 \cdot x^4 \cdot x \cdot (-1)} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{-1}$

$= 3x^2\sqrt{x}\,i$

**Tarih Kutusu**

**Leonhard Euler**
***(Lionhart Oylır)***

**(1707 – 1783)**
*(Temsilî resimdir.)*

Euler, 1748 yılında ilk kez $\sqrt{-1}$ yerine $i$ harfini kullanmıştır.

*Genel ağdan alınmıştır.*

### 4.1.3 Kritik Düşünme

1770 yılında ünlü matematikçi Euler (Öyler), $\sqrt{-2} \cdot \sqrt{3}$ işleminin sonucunun $\sqrt{6}$ olduğunu savunuyordu. Sizce Euler'in bu iddiası doğru mu? Neden?

## i Sayısının Kuvvetleri

Aşağıda i'nin 0, 1, 2, 3 ve 4. kuvvetleri verilmiştir.

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

i'nin aşağıdaki kuvvetlerini $i^4 = 1$ eşitliğini kullanarak bulabiliriz.

$i^5 = i^4 \cdot i = i$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$

*$k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere*

$i^0 = i^4 = i^8 = \ldots = i^{4k} = 1$

$i^1 = i^5 = i^9 = \ldots = i^{4k+1} = i$

$i^2 = i^6 = i^{10} = \ldots = i^{4k+2} = -1$

$i^3 = i^7 = i^{11} = \ldots = i^{4k+3} = -i$'dir.

**15. Örnek**

**Aşağıdaki ifadelerin eşitlerini bulalım.**

**a.** $i^{12} \cdot i^{121}$

**b.** $i^{2023}$

**Çözüm**

**a.** $i^{12} \cdot i^{121} = i^{12+121}$
$= i^{133}$
$= (i^4)^{33} \cdot i$
$= 1^{33} \cdot i$
$= i$

**b.** $i^{2023} = (i^4)^{505} \cdot i^3$
$= 1^{505} \cdot (-i)$
$= -i$

## Karmaşık Sayılar

- $a, b \in \mathbb{R}$ ve $i^2 = -1$ olmak üzere $a + bi$ biçimindeki sayılara karmaşık sayılar denir. Karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}$ ile gösterilir.

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

- $z \in \mathbb{C}$ ve $z = a + bi$ olmak üzere,
  - $a$, $z$'nin gerçek kısmıdır ve $Re(z) = a$ ile gösterilir.
  - $b$, $z$'nin sanal (imajiner) kısmıdır ve $Im(z) = b$ ile gösterilir.

**16. Örnek**

**Aşağıdaki karmaşık sayıların gerçek ve sanal kısımlarını bulalım.**

**a.** $z = 2 - \frac{1}{3}i$ **b.** $z = -\sqrt{2}\,i$

**Çözüm**

**a.** $z = 2 - \frac{1}{3}i$ ise,

$Re(z) = 2$,

$Im(z) = -\frac{1}{3}$'dir.

**b.** $z = -\sqrt{2}\,i$ ise,

$Re(z) = 0$,

$Im(z) = -\sqrt{2}$'dir.

**17. Örnek**

**Aşağıdaki ikinci dereceden denklemlerin karmaşık sayı köklerini bulalım.**

**a.** $x^2 + 8 = 0$ **b.** $x^2 - 4x + 13 = 0$

**Çözüm**

**a.** $x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x^2 = -8$

$\Rightarrow x = \mp\sqrt{-8}$

$\Rightarrow x = \mp\sqrt{8} \cdot \sqrt{-1}$

$\Rightarrow x = \mp 2\sqrt{2}\,i$

$x = -2\sqrt{2}\,i$ veya $x = 2\sqrt{2}\,i$'dir.

**b.** $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -36$

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \mp \sqrt{-36}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{4 \mp 6i}{2}$$

$$= 2 \mp 3i$$

$x = 2 - 3i$ veya $x = 2 + 3i$'dir.

**Tarih Kutusu**

**René Descartes**
***(Ğen Dekart)***

**(1596 – 1650)**
*(Temsilî resimdir.)*

René Descartes 1637 yılında negatif bir sayının karekökünü, "imajiner (sanal)" olarak adlandırmıştır. O zamandan beri karmaşık sayıların "gerçek" ve "sanal" kısımlardan oluştuğu söylenegelmiştir.

*Genel ağdan alınmıştır.*

### Karmaşık Sayının Eşleniği

- *Gerçek kısımları aynı, sanal kısımları birbirinin zıt işaretlisi olan karmaşık sayılara birbirinin eşleniği denir. $a + bi$ ve $a - bi$ karmaşık sayılarından biri, diğerinin eşleniğidir.*
- *$z$ karmaşık sayısının eşleniği $\overline{z}$ ile gösterilir.*

$\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

**18. Örnek**

**Aşağıdaki karmaşık sayıların eşleniklerini bulalım.**

**a.** $2 - 3i$ **b.** $i + 1$ **c.** $5i$ **ç.** $4$

**Çözüm**

**a.** $2 - 3i$'nin eşleniği $2 + 3i$'dir.

**b.** $i + 1 = 1 + i$'nin eşleniği $1 - i$'dir.

**c.** $5i = 0 + 5i$'nin eşleniği $0 - 5i = -5i$'dir.

**ç.** $4 = 4 + 0i$'nin eşleniği $4 - 0i = 4$'tür.

**Tarih Kutusu**

**Carl Gauss**
***(Kâl Gaus)***

**(1777 – 1885)**
*(Temsilî resimdir.)*

18. yüzyılda matematikçiler, karmaşık sayılar gibi yeni sayı türleri ile ilgileniyorlardı, ancak bu sayılarla uğraşmanın özel merak olabileceğini düşünüyorlardı ta ki matematikçi, gökbilimci ve fizikçi olan Gauss, çalışmalarında karmaşık sayılara geniş yer verene kadar.

Yüzyıllarca matematikçiler, bir açıyı pergel ve cetvelle üç eş parçaya ayırmanın metodunu araştırmışlardır. Gauss, karmaşık sayıları kullanarak böyle bir metodun bulunmasının imkânsız olduğunu göstermiştir. Gauss, karmaşık sayılarla yaptığı çalışmalar ile matematikçileri bu sayıların kullanışlı ve gerekli olduğuna ikna etmiştir.

*Genel ağdan alınmıştır.*

- *İkinci dereceden bir bilinmeyenli, gerçek katsayılı bir denklemin sanal kökleri birbirinin eşleniğidir.*
- *Diğer bir deyişle $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin bir kökü $z = k + pi$ ise diğer kökü $\overline{z} = k - pi$'dir.*

**19. Örnek**

**Aşağıdaki ikinci dereceden denklemleri iki kare farkından faydalanarak çözelim.**

**a.** $x^2 + 4 = 0$ **b.** $x^2 + 27 = 0$

**Çözüm**

**a.**
$$x^2 + 4 = 0$$
$$x^2 - 4i^2 = 0 \quad (i^2 = -1)$$
$$x^2 - (2i)^2 = 0$$
$$(x - 2i)(x + 2i) = 0$$
$$x = 2i \vee x = -2i$$

**b.**
$$x^2 + 27 = 0$$
$$x^2 - 27i^2 = 0 \quad (i^2 = -1)$$
$$x^2 - (3\sqrt{3}i)^2 = 0$$
$$(x - 3\sqrt{3}i)(x + 3\sqrt{3}i) = 0$$
$$x = 3\sqrt{3}i \vee x = -3\sqrt{3}i$$

**20. Örnek**

**$f(x) = x^2 - 6x$ olmak üzere $f(x) = -25$ denkleminin köklerini bulalım.**

**Çözüm**

$f(x) = -25 \Rightarrow x^2 - 6x = -25$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 25 = 0$ olur.

Bu denklem için $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25 = -64 < 0$ olduğundan denklemin gerçek kökleri yoktur. Denklemin karmaşık sayı kökleri,

$$x = \frac{-(-6) \mp \sqrt{-64}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{6 \mp 8i}{2}$$

$\Rightarrow x = 3 - 4i$ veya $x = 3 + 4i$'dir.

## 4.1.5 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdaki sayıları sanal birimi kullanarak yazınız.

**a.** $\sqrt{-9}$ **b.** $\sqrt{-\frac{1}{4}}$ **c.** $\sqrt{-5}$

**ç.** $\sqrt{-48}$ **d.** $\sqrt{-300}$

**2.** Aşağıdaki karmaşık sayıların gerçek ve sanal kısımlarını bulunuz.

**a.** $3 - 8i$ **b.** $-4 + \frac{1}{2}i$ **c.** $-\sqrt{-3}$

**ç.** $-1 + \sqrt{-3}$ **d.** $15i$ **e.** $-\frac{2}{3} + \frac{4}{7}i$

**f.** $\frac{3 - 7i}{2}$ **g.** $\frac{3\sqrt{-5} + 1}{4}$

**3.** Aşağıdaki denklemlerin karmaşık sayılar kümesindeki çözüm kümelerini bulunuz.

**a.** $x^2 + 9 = 0$ **b.** $x^2 + 7 = 0$ **c.** $3x^2 + 75 = 0$

**ç.** $x^2 - 2x + 2 = 0$ **d.** $x^2 - 4x + 13 = 0$ **e.** $x^2 + x + 1 = 0$

## İkinci Dereceden Bir Denklemin Kökleri ile Katsayıları Arasındaki İlişki

$a \neq 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri $x_1$ ve $x_2$ olsun.

Kökler toplamı $x_1 + x_2$ yi ve kökler çarpımı $x_1 . x_2$ yi denklemin katsayıları olan a, b veya c cinsinden ifade edebiliriz:

$\Delta > 0$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin;

* Kökler toplamı,

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$= \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}\text{'dır.}$$

* Kökler çarpımı,

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$
$$= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}$$
$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}\text{'dır.}$$

*$\Delta > 0$, $a \neq 0$ olmak üzere,*
*$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri $x_1$ ve $x_2$ ise,*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ ve } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}\text{'dır.}$$

**21. Örnek**

**$-2x^2 + 7x + 1 = 0$ denkleminin kökler toplamını ve çarpımını bulalım.**

**Çözüm**

$a = -2$, $b = 7$ ve $c = 1$'dir.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{7}{-2} = \frac{7}{2}\text{'dir.}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}\text{'dir.}$$

**22. Örnek**

**$x^2 - 9x + 11 = 0$ denkleminin kökleri $x_1$ ve $x_2$ ise $(x_1 + 2)\cdot(x_2 + 2)$ ifadesinin eşitini bulalım.**

**Çözüm**

$$(x_1 + 2)(x_2 + 2) = x_1 \cdot x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 4 = x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4$$
$$= \frac{11}{1} + 2\cdot\left(-\frac{-9}{1}\right) + 4$$
$$= 11 + 18 + 4$$
$$= 33\text{'tür.}$$

### 23. Örnek

**$x^2 + mx - 8 = 0$ denkleminin kökleri arasında $x_1 = x_2^2$ şeklinde bir ilişki olduğuna göre $m$ değerini bulalım.**

**Çözüm**

$x^2 + mx - 8 = 0$ denkleminin kökler çarpımı,

$x_1 \cdot x_2 = x_2^2 \cdot x_2$ *($x_1 = x_2^2$ olduğundan)*

$= x_2^3$ tür.

Ayrıca $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-8}{1} = -8$ olduğundan, $x_2^3 = -8 \Rightarrow x_2 = -2$ olur.

$x_2 = -2$ verilen denklemi sağlayacağından,

$(-2)^2 + m \cdot (-2) - 8 = 0 \Rightarrow 4 - 2m - 8 = 0$

$\Rightarrow m = -2$ bulunur.

## Kökleri Verilen İkinci Dereceden Denklemin Yazılması

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\{x_1, x_2\}$ olsun.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde sol taraf $a$ parantezine alınırsa,

$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \Rightarrow x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$ olur.

Bu eşitlikte $-\frac{b}{a} = x_1 + x_2$ ve $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$ yazılırsa,

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$ elde edilir.

*Çözüm kümesi $\{x_1, x_2\}$ olan ikinci dereceden denklem,*

*$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 . x_2 = 0$'dır.*

### 24. Örnek

**Kökleri $x_1 = -1$ ve $x_2 = 3$ olan ikinci dereceden denklemi bulalım.**

**Çözüm**

$x_1 + x_2 = -1 + 3 = 2$ $\quad x_1 \cdot x_2 = -1 . 3 = -3$

Bu değerler,

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$ denkleminde yerine yazılırsa,

$x^2 - 2x - 3 = 0$ bulunur.

**25. Örnek**

**$x^2 - 8x - 9 = 0$ denkleminin kökleri $x_1$ ve $x_2$ ise kökleri $3x_1 + 2$ ve $3x_2 + 2$ olan ikinci dereceden denklemi bulalım.**

**Çözüm**

$x^2 - 8x - 9 = 0$ denkleminin kökleri $x_1$ ve $x_2$ ise $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 8$, $x_1 . x_2 = \frac{c}{a} = -9$'dur.

İstenilen denklemin kökleri $m$ ve $n$ ise $m = 3x_1 + 2$, $n = 3x_2 + 2$'dir.

İstenilen denklem $x^2 - (m + n)x + m.n = 0$'dır.

$m + n = (3x_1 + 2) + (3x_2 + 2) = 3(x_1 + x_2) + 4 = 3 \cdot 8 + 4 = 28$

$m.n = (3x_1 + 2).(3x_2 + 2) = 9x_1x_2 + 6(x_1 + x_2) + 4 = 9 \cdot (-9) + 6 \cdot 8 + 4 = -29$

Bu değerleri $x^2 - (m + n)x + m.n = 0$ denkleminde yerine yazarsak, $x^2 - 28x - 29 = 0$ buluruz.

## 4.1.6 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdaki denklemleri çözmeden köklerinin toplamını ve çarpımını bulunuz.

**a.** $x^2 + x - 12 = 0$ **b.** $4x^2 - 7x + 2 = 0$ **c.** $-3x^2 + 4x + 2 = 0$

**ç.** $\frac{3}{4}x^2 - x = 0$ **d.** $-x^2 - (m + 1)x + 3 = 0$ **e.** $2mx^2 - x - x + 3m - 3 = 0$

**2.** $x^2 - 7x + 4 = 0$ denkleminin kökleri $x_1$ ve $x_2$ ise aşağıdaki ifadelerin değerlerini bulunuz.

**a.** $x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3$ **b.** $\frac{1}{x_1 - 2} + \frac{1}{x_2 - 2}$

**3.** $(2m - 1)x^2 - (m - 3)x + m + 1 = 0$ denkleminin kökleri arasında $x_2 = \frac{1}{x_1}$ şeklinde bir ilişki varsa $x_1 + x_2$ kaçtır?

**4.** Aşağıda 1. sütunda çözüm kümeleri verilen denklemleri 2. sütundan bulup eşleştiriniz.

**a.** $\{-2, 3\}$

**b.** $\{-2\}$

**c.** $\{1 + 2\sqrt{3}, 1 - 2\sqrt{3}\}$

**I.** $x^2 + 45 = 0$

**II.** $x^2 - 15 = 0$

**III.** $x^2 - 2x - 11 = 0$

**IV.** $x^2 - x - 6 = 0$

**V.** $x^2 + 4x + 4 = 0$

**5.** $x^2 - 4x + 1 = 0$ denkleminin kökleri $x_1$ ve $x_2$ ise kökleri $\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)$ ve $\left(x_2 + \frac{1}{x_1}\right)$ olan ikinci dereceden denklemi bulunuz.

# 4.1 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI

**1.** $(a-2)x^5 + 3x^{b-1} - 3x + 2 = 0$
denklemi ikinci dereceden bir denklem ise $a + b$ kaçtır?

**2.** $(a+b-3)x^{b+2} + 2x - 1 = 0$
denklemi ikinci dereceden bir denklem ise
$a$ hangi değeri **alamaz?**

**3.** Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümelerini bulunuz.

**a.** $3x^2 - 27 = 0$ **b.** $\frac{9}{25}x^2 = 0$ **c.** $4x^2 - 1 = 0$

**ç.** $\frac{5x^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{x^2}{4}$ **d.** $\frac{x^2}{4} + \frac{9}{4} = 0$ **e.** $\frac{x}{5} = \frac{2x}{9} - \frac{1}{x}$

**4.** Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümelerini bulunuz.

**a.** $3x^2 - 5x = 0$

**b.** $3x + 1 = (2x+1)(1-x)$

**c.** $x(5-x) + x(1-x) = 0$

**ç.** $3x - 4x^2 = \frac{3x}{5}$

**d.** $3x + 4 = \frac{2x-4}{x-1}$

**e.** $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right) = 3x - \frac{1}{16}$

**5.** Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümelerini çarpanlarına ayırma veya tam kareye tamamlama yöntemlerini kullanarak bulunuz.

**a.** $x^2 + 7x + 10 = 0$ **b.** $x^2 + 7x + 12 = 0$

**c.** $x^2 - 4x + 4 = 0$ **ç.** $x^2 = 6x - 5$

**d.** $x^2 + 49 = 14x$ **e.** $x^2 - 14 = 5x$

**f.** $3x^2 + 3x - 18 = 0$ **g.** $3x^2 - 7x + 2 = 0$

**ğ.** $1 + 2x - 3x^2 = 0$ **h.** $2x^2 + 12 = 10x$

**ı.** $2x^2 = x + 1$ **i.** $4x^2 = -21x - 5$

**6.** Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümelerini bulunuz.

**a.** $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

**b.** $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

**c.** $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$

**ç.** $(x^2 - 2x)^2 - 11(x^2 - 2x) + 24 = 0$

**7.** Aşağıdaki noktalı yerleri uygun ifadelerle doldurunuz.

**a.** $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ şeklindeki ikinci dereceden bir denklemin köklerini veren ..... formülündeki ..... ifadesi denklemin diskriminantını gösterir.

**b.** İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklemin diskriminantı ..... ise denklemin iki tane farklı gerçek kökü, ..... ise eşit iki gerçek kökü bulunur, gerçek kökü yoksa diskriminantı ..... .

**8.** Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümelerini $\Delta$'ya bakarak bulunuz.

**a.** $x^2 + 6x + 7 = 0$ **b.** $x^2 - x - 1 = 0$

**c.** $x^2 + 5x = 1$ **ç.** $2x^2 - 3 = 2x$

**d.** $(x-2)\cdot(x+1) = 7$ **e.** $(x-2)^2 = 1 + x$

**f.** $(x-2)^2 = 1 - x$ **g.** $3x - \frac{1}{x} = 1$

**ğ.** $(x+3)(2x-1) = 1 - 2x$ **h.** $\frac{x-1}{2-x} = 2x + 1$

**9.** Karelerinin toplamı 340 olan ardışık iki çift sayıyı bulunuz.

**10.** $x^2 - (m+2)x + m = 0$ denklemi için aşağıdakilerden hangisi daima doğrudur?

A) Eşit iki kökü vardır.

B) Gerçek kökü yoktur.

C) Köklerinden biri sıfırdır.

D) Köklerinden biri 1'dir.

E) Farklı iki gerçek kökü vardır.

**11.** $x^2 - 4x = 0$ ve $x^2 + ax + 2a - 4 = 0$ denklemlerinin birer kökü aynı ise a'nın alacağı değerler toplamı kaçtır?

**12.** Aşağıdaki denklemlerin karmaşık sayılar kümesindeki çözüm kümelerini bulunuz.

**a.** $x^2 + 7 = 0$ **b.** $2x^2 + 9 = 0$

**c.** $x^2 + 6x + 25 = 0$ **ç.** $2x^2 + 5 = 6x$

**d.** $x^2 + 13 = 4x$ **e.** $x^2 + 29 = 10x$

**f.** $x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = 0$ **g.** $2x + \frac{1}{x} = 1$

**ğ.** $x^2 - (1+2i)x + 3 + i = 0$

**13.** Aşağıda ikinci dereceden denklemler ve birer kökleri verilmiştir. Buna göre m değerlerini bulunuz.

**a.** $2x^2 - 3mx + m - 1 = 0$ , $x_1 = 2$

**b.** $(m+1)x^2 - 2mx + 3 = 0$ , $x_1 = 3$

**14.** Aşağıda ikinci dereceden denklemler ve birer kökleri verilmiştir. Buna göre m değerlerini bulunuz.

**a.** $mx^2 - 2x + 3 = 0$ , $x_1 = 1$

**b.** $2x^2 + (m-1)x + 3 - m = 0$ , $x_1 = \frac{1}{2}$

**15.** Aşağıdaki tabloda verilen ikinci dereceden denklemlerin kökleri $x_1$ ve $x_2$ dir. Tabloda verilenlere göre istenenleri bulunuz.

*Tablo:* İkinci Dereceden Denklemler

| | Denklem | Verilen | İstenen |
|---|---|---|---|
| a. | $2x^2 + kx + 3 = 0$ | $x_1 + x_2 = 5$ | k |
| b. | $2x^2 - x + k = 0$ | $x_1 \cdot x_2 = -3$ | k |
| c. | $3x^2 - nx + 1 = 0$ | $x_1 + x_2 = 3x_1x_2$ | n |
| ç. | $2x^2 - px + 2p - 1 = 0$ | $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 + 3$ | p |
| d. | $2x^2 - x + k - 2 = 0$ | $(x_1+1)\cdot(x_2+1) = 5/2$ | k |
| e. | $x^2 + (1-m)x + m - 2 = 0$ | $x_1 = 3x_2$ | m |
| f. | $x^2 - 6x + m = 0$ | $x_1 + 3x_2 = 4$ | $x_1$ ve $x_2$ |
| g. | $2x^2 - 3x + m - 2 = 0$ | $x_1 = 2x_2$ | m |
| ğ. | $x^2 - mx + m - 2 = 0$ | $2x_1 + x_2 = 2$ | m |

**16.** 4 ve $-1$ sayılarını kök kabul eden ikinci dereceden denklemi yazınız.

**17.** $3x^2 - 12x + 1 = 0$ denkleminin kökleri $x_1$ ve $x_2$ ise kökleri $2x_1 + 1$ ve $2x_2 + 1$ olan ikinci dereceden denklemi yazınız.

**18.** $x^2 - ax + b = 0$ denkleminin kökleri, $x^2 + cx - d = 0$ denkleminin köklerinden ikişer fazla ise $b + d + c - a$ kaçtır?

**19.** Bir dikdörtgenin boyu, eninden 3 cm fazladır. Bu dikdörtgenin alanı $40\ cm^2$ olduğuna göre boyutlarını bulunuz.

**20.** Bir annenin yaşı, oğlunun yaşının 3 katıdır. Beş yıl önce yaşlarının çarpımı 217 olduğuna göre anneyle oğlunun şimdiki yaşları toplamı kaçtır?

**21.** Bir dikdörtgenin çevresi 22 cm ve alanı $28\ cm^2$ dir. Bu dikdörtgenin enini ve boyunu bulunuz.

# 4. ALT ÖĞRENME ALANI TESTİ

**1.** $x^2 - 7x + 3$ **denkleminin diskriminantı kaçtır?**

A) 24 B) 37 C) 42 D) 49 E) 63

**2.** $x^2 - 2x - 35 = 0$ **denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $\{1, 35\}$ B) $\{-1, 35\}$ C) $\{-7, 5\}$
D) $\{7, -5\}$ E) $\{14, 5\}$

**3.** $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$ **denkleminin pozitif köklerinin çarpımı kaçtır?**

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) 2 D) $2\sqrt{2}$ E) 4

**4.** $(x^2 - x - 2)^2 - 14 \cdot (x^2 - x - 2) + 40 = 0$

**denklemini gerçekleyen x değerlerinin çarpımı kaçtır?**

A) 72 B) 36 C) 24 D) $-24$ E) $-36$

**5.** $mx^2 - (1 - 2m)x + 1 + m = 0$ **denkleminin köklerinden biri** $-2$ **ise diğer kökü kaçtır?**

A) 2 B) 1 C) 0 D) $-\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{3}$

**6.** $2x^2 - x - 4 = 0$ denkleminin kökleri $x_1$ ve $x_2$ ise $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ **ifadesinin eşiti kaçtır?**

A) $\frac{17}{8}$ B) $\frac{17}{4}$ C) $-\frac{17}{4}$ D) $-\frac{17}{8}$ E) $-\frac{17}{16}$

**7.** $x^2 - 7x + 5m - 3 = 0$ denkleminin kökleri $x_1$ ve $x_2$ dir.

**$3x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 = 35$ olduğuna göre m kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**8.** $x^2 - 4x + a^2 - a = 0$ denkleminin kökleri $x_1$ ve $x_2$ dir.

**$x_1 + 2x_2 = 5$ ise a'nın alabileceği değerler toplamı kaçtır?**

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

**9.** $x^2 - 3x + m = 0$ denkleminin kökleri,
$x^2 - 5x + 4m - 2 = 0$ **denkleminin köklerinden birer eksik ise m kaçtır?**

A) $-2$ B) $-1$ C) 0 D) 1 E) 2

**10.** $x^2 - 6x + 3 = 0$ denkleminin kökleri $x_1$ ve $x_2$ ise kökleri $\left(x_1 - \frac{1}{x_2}\right)$ ve $\left(x_2 - \frac{1}{x_1}\right)$ **olan ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x^2 - 4x - 3 = 0$ B) $x^2 - 4x + 3 = 0$
C) $3x^2 - 4x + 8 = 0$ D) $3x^2 - 12x + 4 = 0$
E) $4x^2 - 12x + 3 = 0$

**11.** a, b, c sıfırdan farklı gerçek sayılardır.
$ax^2 + bx - 2 = 0$ denkleminin kökleri,
$x^2 + ax + c = 0$ denkleminin köklerinin ikişer katı olduğuna göre **b.c aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $-3a$ B) $-2a$ C) $-a$ D) $a$ E) $a + 2$

**12.** $x^2 - 3x + m = 0$ denkleminin kökleri a ve b,
$x^2 + mx - 3 = 0$ denkleminin kökleri a ve c'dir.

**b + c = m – 3 ise m kaç olabilir?**

A) $-3$ B) $-2$ C) 1 D) 2 E) 3

**13.** $mx^2 + (m-3)x - 4 = 0$ **denkleminde, köklerin birbirine eşit olması için m'nin alması gereken değerler toplamı kaçtır?**

A) $-10$ B) $-9$ C) $-8$ D) $-7$ E) $-6$

**14.** Çözüm kümesi, $\{x_1, x_2\}$ olan ikinci dereceden bir denklemin kökleri arasında,
$x_1 - x_2 = 3x_1 + x_2 - 2x_1x_2$ ve
$3x_1x_2 = 8 + x_1 + x_2$
**bağıntısı varsa bu denklem aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x^2 - 4x + 4 = 0$ B) $x^2 + 4x + 4 = 0$
C) $x^2 + 2x + 1 = 0$ D) $x^2 - 2x + 1 = 0$
E) $x^2 - 6x + 9 = 0$

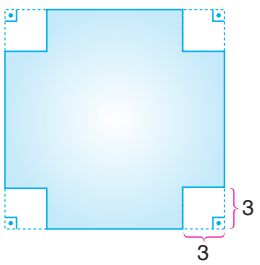
**15.** **Köklerinden biri $1 - \sqrt{5}$ olan rasyonel katsayılı ikinci dereceden denklem aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $x^2 - x + 2 = 0$ B) $x^2 - 2x + 4$
C) $x^2 - 2x - 4 = 0$ D) $x^2 - 4x - 2 = 0$
E) $x^2 - 4x + 2 = 0$

**16.** $m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $3x^2 + mx + n = 0$ **denkleminin köklerinden biri $1 - 2i$ ise n – m kaçtır?**

A) 24 B) 21 C) 15 D) 12 E) 9

**17.** Üstü açık bir kutunun hacmi $48\ cm^3$ tür. Bu kutu kare şeklindeki bir kartonun köşelerinden kenar uzunluğu 3 cm olan kareler kesilerek oluşturulmuştur.

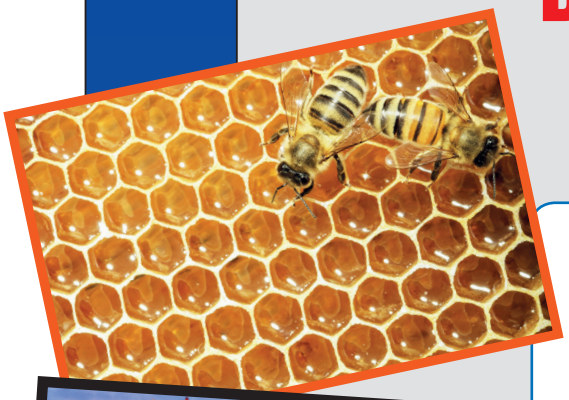



**Buna göre kutuyu oluşturmak için kullanılan kartonun başlangıçtaki kenar uzunluğu kaç cm'dir?**

A) 8 B) 10 C) 12 D) 15 E) 18

# 5. ALT ÖĞRENME ALANI

# DÖRTGENLER VE ÇOKGENLER



## Konular


**5.1** Çokgenler

**5.2** Dörtgenler ve Özellikleri

**5.3** Özel Dörtgenler

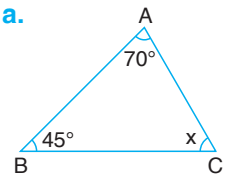

*Dörtgenler estetik bir görünüm ve dayanıklılık sağladığı için bina, köprü, havalimanı vb. yapıların tasarımlarında sıkça kullanılır. Bu ünitede günlük hayatımızda sıkça karşılaştığımız kavramlar olan dörtgen ve çokgenlerin açı, çevre ve alan özelliklerini öğreneceğiz.*

# Hazır mısınız?

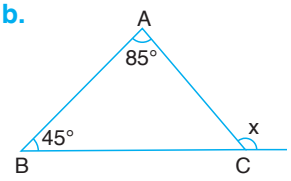
**5.1 Alt Öğrenme Alanı**

**1.** Aşağıdaki üçgenlerde verilenlere göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

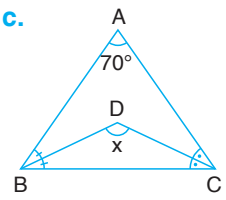
**a.**



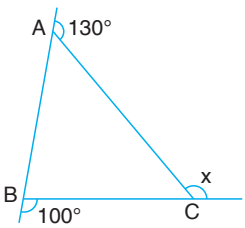

**b.**




**c.**

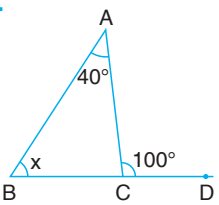



**ç.**

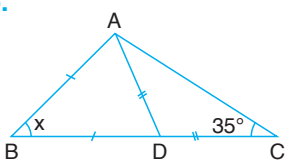



**2.** Aşağıdaki üçgenlerde verilenlere göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

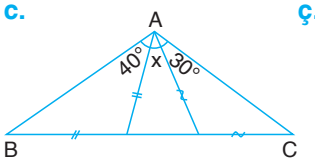
**a.**



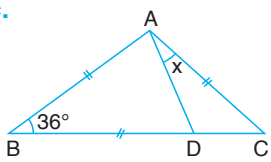

**b.**




**c.**

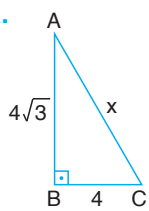



**ç.**

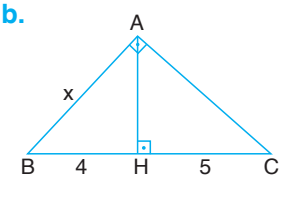



**3.** Aşağıdaki üçgenlerde verilenlere göre x'in kaç birim olduğunu bulunuz.

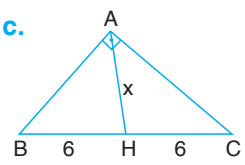
**a.**



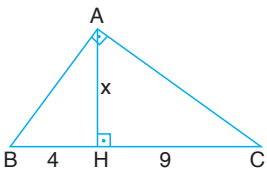

**b.**




**c.**

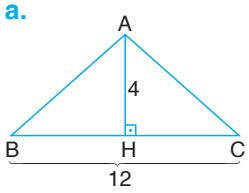



**ç.**

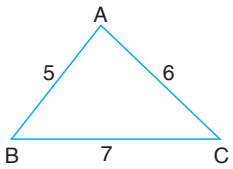



**4.** Aşağıdaki üçgenlerde verilenlere göre üçgenlerin alanını birimkare cinsinden bulunuz.

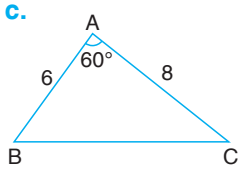
**a.**



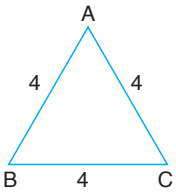

**b.**




**c.**

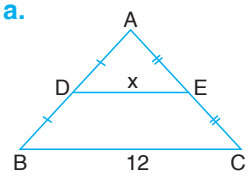



**ç.**

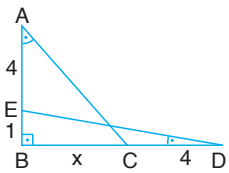



**5.** Aşağıdaki üçgenlerde verilenlere göre x'in kaç birim olduğunu bulunuz.

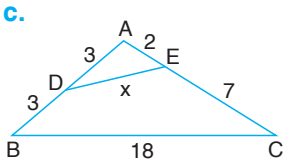
**a.**



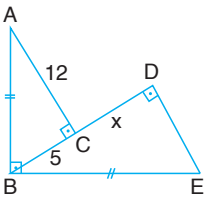

**b.**




**c.**

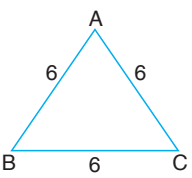



**ç.**



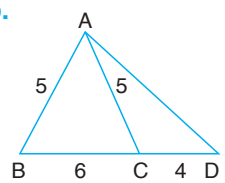

**6.** Aşağıdaki üçgenlerde verilenlere göre istenen alanları birimkare cinsinden bulunuz.

**a.**



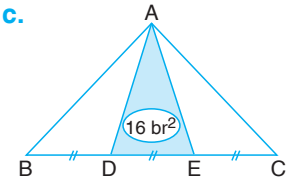

$A(\widehat{ABC}) = ?$

**b.**



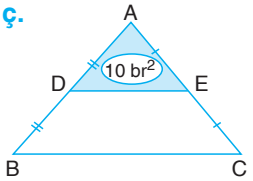

$A(\widehat{ACD}) = ?$

**c.**




$A(\widehat{ABC}) = ?$

**ç.**



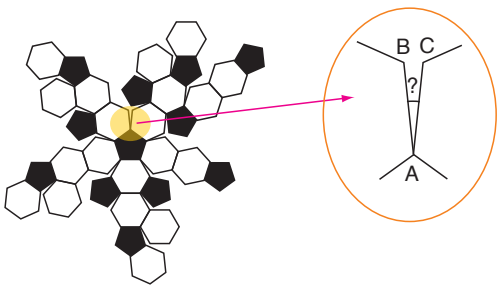

$A(\widehat{ABC}) = ?$

KONU 5.1

# ÇOKGENLER

Günlük Hayat Bağlantısı

Yandaki fotoğrafta futbol topuna şekli ni veren Arşimed cismi truncated icosahedron (tronkeydıd ikasahedrın) görülmektedir. Bu çok yüzlünün açınımı 12 düzgün beşgen ve 20 düzgün altıgenden oluşur.

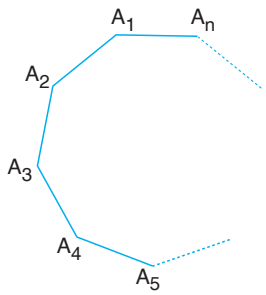



Açınımda gösterilen BAC açısının ölçüsü kaç derecedir?

**Neler Öğreneceğiz?**

- Çokgeni
- Çokgenlerin açı özelliklerini
- Düzgün çokgenleri

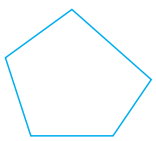
- *$n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 3$ olmak üzere aynı düzlemde ardışık üç tanesi doğrusal olmayan $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ noktalarını $[A_1A_2] \cup [A_2A_3] \cup \ldots \cup [A_nA_1]$ şeklinde birleştiren doğru parçalarının birleşimine çokgen denir.*
- *$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ noktalarına çokgenin köşeleri, bu noktaları birleştiren $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ..., $[A_nA_1]$ doğru parçalarına çokgenin kenarları denir.*
- *Çokgenler, kenar sayılarına göre adlandırılırlar.*
  - *Üç kenarı olan çokgene üçgen,*
  - *Dört kenarı olan çokgene dörtgen,*
  - *Beş kenarı olan çokgene beşgen,*
  - *$n$ kenarı olan çokgene $n$-gen denir.*




## 1. Örnek

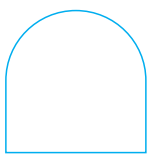
**Aşağıdaki geometrik şekillerin çokgen olup olmadığını belirleyelim. Çokgen olanları isimlendirelim.**

I.



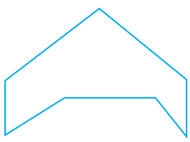
Çokgendir; beşgen.

II.



Çokgen değil.

III.



Çokgendir; yedigen.

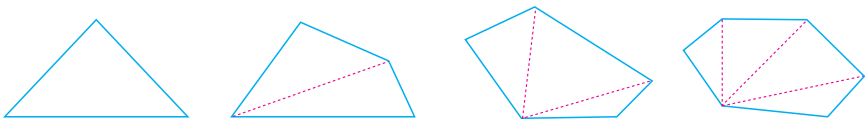
**UYARI**

Bir geometrik şeklin çokgen olabilmesi için üç ya da daha fazla doğru parçasından oluşmuş kapalı şekil olması ve bu doğru parçalarının ikişerli tek bir noktada ve köşelerinden kesişmesi gerekir.

**Hatırlayalım**

Bir çokgenin ardışık olmayan iki köşesini birleştiren doğru parçasına köşegen denir.

Bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamını bulmak için çokgenin bir köşesinden çizilebilecek tüm köşegenler çizilir. Bu şekilde çokgenin iç bölgesinde üçgenler oluşur. Oluşan bu üçgenlerin iç açılarının ölçüleri toplamı, çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamına eşittir.



Üçgen Dörtgen Beşgen Altıgen

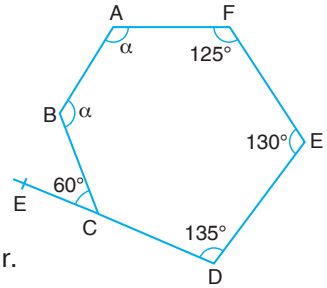
***Tablo:*** Çokgenlerin İç Açılarının Ölçüleri Toplamı

| Çokgen | Çokgenin Kenar Sayısı | Oluşan Üçgen Sayısı | Çokgenin İç Açılarının Ölçüleri Toplamı |
|---|---|---|---|
| Üçgen | 3 | 1 | $1 \cdot 180° = 180°$ |
| Dörtgen | 4 | 2 | $2 \cdot 180° = 360°$ |
| Beşgen | 5 | 3 | $3 \cdot 180° = 540°$ |
| Altıgen | 6 | 4 | $4 \cdot 180° = 720°$ |
| n – gen | n | $n - 2$ | $(n - 2) \cdot 180°$ |

- *n kenarlı bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı* $(n - 2) \cdot 180°$ *dir.*
- *n kenarlı bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamı* $360°$ *dir.*

## 2. Örnek

**ABCDEF altıgeninde verilenlere göre α'nın kaç derece olduğunu bulalım.**
(D, C, E doğrusal.)




**Çözüm**

$m(\widehat{BCD}) + 60° = 180° \Rightarrow m(\widehat{BCD}) = 120°$ dir.

ABCDEF altıgenin iç açılarının ölçüleri toplamı,

$(6 - 2) \cdot 180° = 720°$ dir.

Buna göre,

$\alpha + \alpha + 125° + 130° + 135° + 120° = 720°$

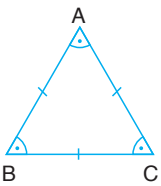
$2\alpha + 510° = 720°$

$2\alpha = 210°$

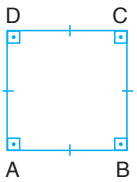
$\alpha = 105°$ bulunur.

### Düzgün Çokgen

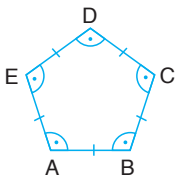
*Kenar uzunlukları ve iç açılarının (veya dış açılarının) ölçüleri eşit olan çokgenlere düzgün çokgen denir.*



Eşkenar Üçgen



Kare

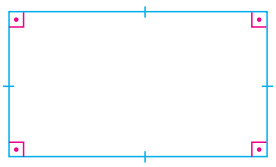


Düzgün Beşgen

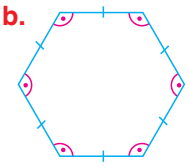
## 3. Örnek

**Aşağıdaki çokgenlerin düzgün çokgen olup olmadığını belirleyelim.**

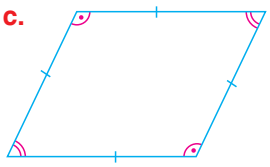
**a.**



**b.**



**c.**



**Çözüm**

**a.** Düzgün çokgen değildir. (Dikdörtgendir.)

**b.** Düzgün çokgendir. (Düzgün altıgendir.)

**c.** Düzgün çokgen değildir. (Eşkenar dörtgendir.)

### Düzgün Çokgende İç ve Dış Açı

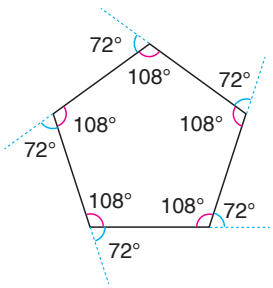
- *n kenarlı düzgün çokgenin bir iç açısının ölçüsü* $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$*'dir.*
- *n kenarlı düzgün çokgenin bir dış açısının ölçüsü* $\frac{360^\circ}{n}$*'dir.*

## 4. Örnek

**Düzgün beşgen ve düzgün altıgenin iç açılarının ölçülerini derece cinsinden bulalım.**

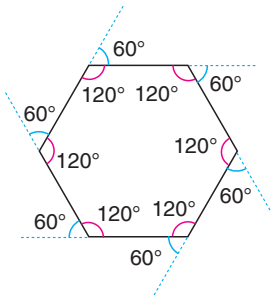
**Çözüm**

**a.**




Düzgün beşgenin bir dış açısının ölçüsü $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ ve bir iç açısının ölçüsü
$180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ dir.

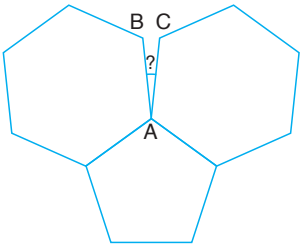
**b.**



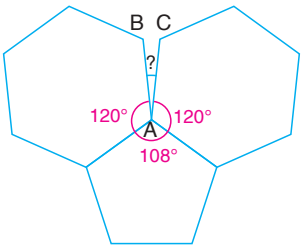

Düzgün altıgenin bir dış açısının ölçüsü $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ ve bir iç açısının ölçüsü
$180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ dir.

## 5. Örnek

**İki düzgün altıgen ve bir düzgün beşgenin yandaki gibi birleşiminden oluşan şekilde $m(\widehat{BAC})$'nün kaç derece olduğunu bulalım.**




**Çözüm**




Düzgün altıgenin bir iç açısının ölçüsü 120° ve düzgün beşgeninki 108° dir.

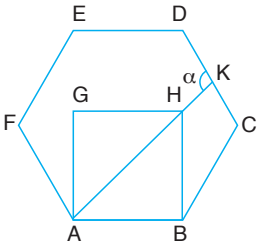
$$m(\widehat{BAC}) + 120° + 120° + 108° = 360°$$

$$m(\widehat{BAC}) + 348° = 360°$$

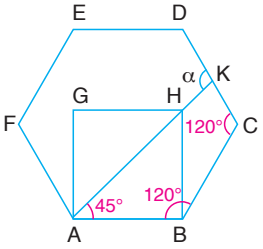
$$m(\widehat{BAC}) = 12° \text{ bulunur.}$$

## 6. Örnek

**ABCDEF düzgün altıgen, ABHG kare ve $H \in [AK]$ olmak üzere $m(\widehat{AKD}) = \alpha$'nın kaç derece olduğunu bulalım.**




**Çözüm**




Düzgün altıgenin bir iç açısı 120° olduğundan, $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BCD}) = 120°$ dir.

[AH], ABHG karesinin köşegeni olduğundan, $m(\widehat{HAB}) = 45°$ dir.

ABCK dörtgeninde iç açıların ölçüleri toplamı 360° olduğundan,

$$45° + 120° + 120° + m(\widehat{CKA}) = 360° \Rightarrow 285° + m(\widehat{CKA}) = 360°$$

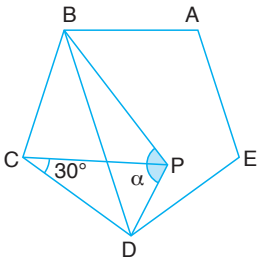
$$\Rightarrow m(\widehat{CKA}) = 75° \text{ olur.}$$

O hâlde $\alpha = 180° - m(\widehat{CKA})$

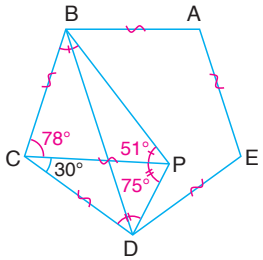
$= 180° - 75° = 105°$ bulunur.

## 7. Örnek

**ABCDE düzgün beşgeninde $|CP| = |CD|$, $m(\widehat{PCD}) = 30°$ olduğuna göre $m(\widehat{BPD}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulalım.**




**Çözüm**




Düzgün beşgenin bir iç açısının ölçüsü,

$$180° - \frac{360°}{5} = 108°$$ dir.

$m(\widehat{BCD}) = 108°$ ise,

$m(\widehat{BCP}) = 108° - 30° = 78°$ olur.

PCD üçgeni ikizkenar üçgen olduğundan,

$$m(\widehat{CPD}) = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$$ olur.

PCB üçgeni ikizkenar üçgen olduğundan,

$$m(\widehat{CPB}) = \frac{180° - 78°}{2} = 51°$$ olur.

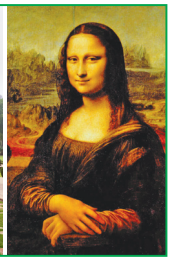
O hâlde $\alpha = m(\widehat{CPD}) + m(\widehat{CPB})$

$= 75° + 51° = 126°$ bulunur.

### Bunları Biliyor musunuz?

Daha önce altın oran ile ilgili çok şey duymuşsunuzdur. Altın oran yaklaşık olarak 1,618'in 1'e oranı yani 1,618'dir. Sanatçılar, mimarlar, bilim adamları ve tasarımcılar araştırmalarını yaparken ya da ürünlerini ortaya çıkartırken orantılarda altın oranı kullanmayı tercih ederler. Çünkü altın oran kullanıldığında son derece dengeli ve hoş bir görüntü elde edilir.

Taj Mahal, Hindistan

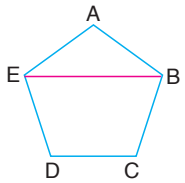


Mona Lisa, Leonardo da Vinci

Örneğin Hindistan'daki Taj Mahal (Taj Mahal) ve ünlü ressam Leonardo da Vinci'nin (Lionardo Da Vinçi), Mona Lisa (Mona Lisa) adlı tablosunda altın oran kullanılmıştır.

Bir düzgün beşgenin bir köşegen uzunluğunun, bir kenarının uzunluğuna oranı da altın orana eşittir.

Siz de araştırarak bilim, sanat ve matematikte kullanılan altın oran örnekleri bulunuz.




$$\frac{|EB|}{|AB|} \approx 1{,}618$$

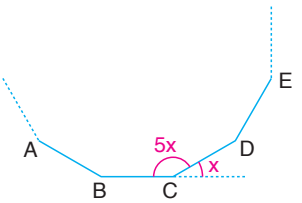
## 8. Örnek

Düzgün bir çokgende bir iç açının ölçüsü, dış açının ölçüsünün 5 katıdır.

**Buna göre düzgün çokgenin kenar sayısını bulalım.**

### Çözüm

Düzgün çokgenin bir dış açısının ölçüsü x ise iç açısının ölçüsü 5x'tir.



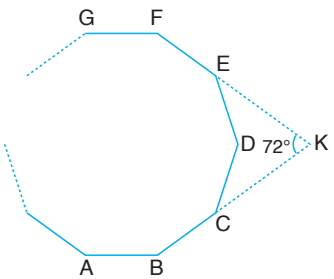

İç ve dış açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğundan,

$x + 5x = 180° \Rightarrow 6x = 180°$

$\Rightarrow x = 30°$ olur.

Düzgün çokgenin bir dış açısının ölçüsü 30° ve kenar sayısı n ise,

$$30° = \frac{360°}{n} \Rightarrow n = 12\text{'dir.}$$




## 9. Örnek

**ABCDEFG... düzgün çokgeninde E∈[FK], C∈[BK] ve $m(\widehat{BKF}) = 72°$ olduğuna göre düzgün çokgenin kenar sayısını bulalım.**

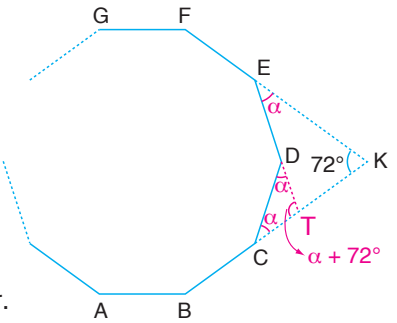
### Çözüm

ABCDEFG... düzgün çokgen olduğundan bütün dış açılarının ölçüleri birbirine eşittir.

[ET] ∩ [BK] = {T} olacak şekilde [ET]'nı çizelim.

Buna göre,

$m(\widehat{KED}) = m(\widehat{DCK}) = m(\widehat{CDT}) = \alpha$ olur.




TKE üçgeninde iki iç açının ölçüleri toplamı kendilerine komşu olmayan bir dış açının ölçüsüne eşit olacağından,

$m(\widehat{ETC}) = 72° + \alpha$'dır.

CTD üçgeninde iç açıların ölçüleri toplamı 180° olduğundan,

$\alpha + \alpha + 72° + \alpha = 180° \Rightarrow 3\alpha + 72° = 180°$

$\Rightarrow \alpha = 36°$ olur.

Düzgün çokgenin bir dış açısının ölçüsü 36° ve kenar sayısı n ise,

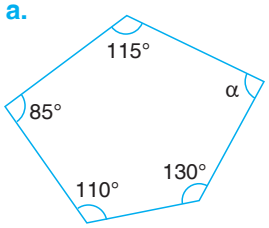
$$36° = \frac{360°}{n} \Rightarrow n = 10\text{'dur.}$$

Buna göre ABCDEFG... 10 kenarlıdır.

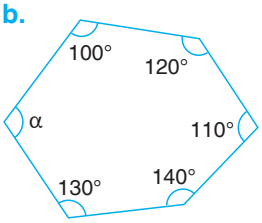
## 5.1.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdaki çokgenlerde verilenlere göre $\alpha$'nın kaç derece olduğunu bulunuz.

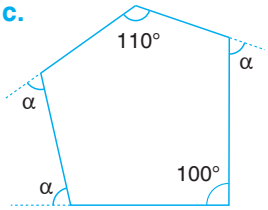
**a.**




**b.**

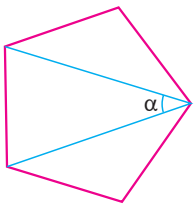



**c.**

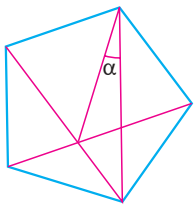



**2.** Aşağıdaki düzgün beşgenlerde verilenlere göre $\alpha$'nın kaç derece olduğunu bulunuz.

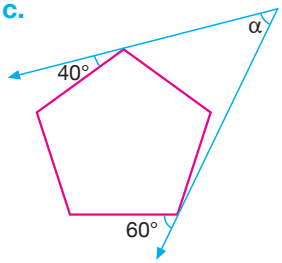
**a.**




**b.**

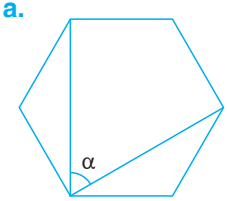



**c.**

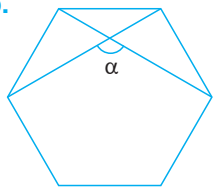



**3.** Aşağıdaki düzgün altıgenlerde verilenlere göre $\alpha$'nın kaç derece olduğunu bulunuz.

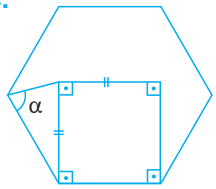
**a.**




**b.**

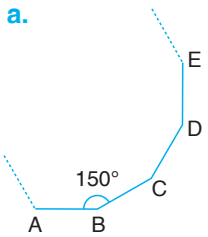



**c.**

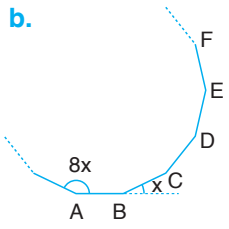



**4.** ABCDEFG.... düzgün çokgenin ardışık köşeleri olmak üzere şekillerde verilenlere göre çokgenlerin kenar sayılarını bulunuz.

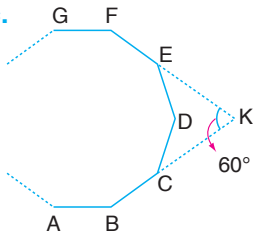
**a.**




**b.**




**c.**




**Tarih Kutusu**

| Üçgen Sayılar | Dörtgen Sayılar |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 3 | 4 |
| 6 | 9 |
| 10 | 16 |
| **Beşgen Sayılar** | **Altıgen Sayılar** |
| 1 | 1 |
| 5 | 6 |
| 12 | 15 |
| 22 | 28 |

Eski Yunanlılar sayıları, ölçü ve geometrik şekillerine göre nesnelerle eşleştirerek somutlaştırmaya çalışmışlardır. Bu sebeple çakıl taşları ile çeşitli şekiller oluşturarak bu şekillerle sayılar arasında aritmetik ve mistik bir ilişki bulmaya çalışmışlardır. Bu şekillerden bazıları yukarıda gösterilmiştir.

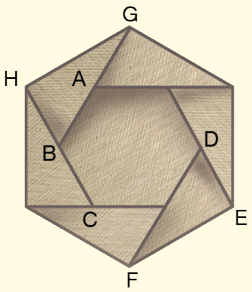
# 5.1 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI

**1.** Aşağıdaki tabloyu tamamlayınız.

***Tablo:*** Düzgün Çokgenlerin İç ve Dış Açılarının Ölçüleri

| Düzgün Çokgenin Kenar Sayısı | Bir İç Açısının Ölçüsü | Bir Dış Açısının Ölçüsü |
|---|---|---|
| 4 | | |
| 5 | | |
| | 120° | |
| | 135° | |
| 10 | | |

**2.** El işi kâğıdının katlanmasıyla oluşturulmuş yandaki modelde iki tane düzgün altıgen görülmektedir. Buna göre aşağıdaki ifadeler doğruysa boş kutulara "D", yanlışsa "Y" yazınız.




**a.** ☐ $m(\widehat{ABC}) = 120°$

**b.** ☐ $m(\widehat{EDF}) = 60°$

**c.** ☐ $|AB| = |DE|$

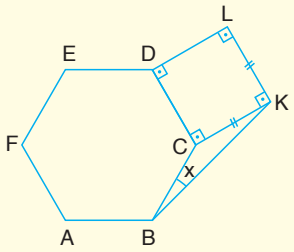
**ç.** ☐ $|GB| = |DF|$

**3.** Trafik işaret ve levhaları, trafik ortamında bulunan sürücü, yaya ve yolcuların ortak dilidir. Bu yüzden trafik işaret ve levhalarından oluşan bu ortak dili doğru ve yerinde kullanmak trafik güvenliği açısından çok önemlidir.

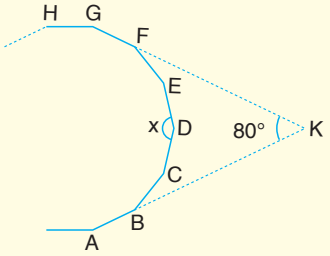
Yukarıdaki iki trafik levhasının birleşiminden oluşan şekilde levhaların birer kenarları eşit uzunlukta ve çakışıktır. Üçgen levha eşkener üçgen, dörtgen levha da kare şeklinde olduğuna göre $m(\widehat{ABC})$ kaç derecedir?

**4.** Aşağıdaki düzgün çokgenlerde verilenlere göre x açısının kaç derece olduğunu bulunuz.

**a.**




**b.**




**5.** Kenar sayısı çift sayı olan bir düzgün çokgende herhangi bir köşe ile karşısındaki köşeyi birleştiren doğru parçasının köşelerdeki açıların açıortayı olduğunu gösteriniz.

**6.** Kenar sayısı tek sayı olan bir düzgün çokgende herhangi bir köşe ile karşısındaki kenarın orta noktasını birleştiren doğru parçasının köşedeki açının açıortayı olduğunu gösteriniz.

**7.** Bir düzgün çokgenin bir dış açısının ölçüsü en çok kaç derece olabilir?

**8.** Dış açılarının ölçüleri derece cinsinden tam sayı olan kaç farklı düzgün çokgen çizilebilir?

KONU 5.2

# DÖRTGENLER VE ÖZELLİKLERİ

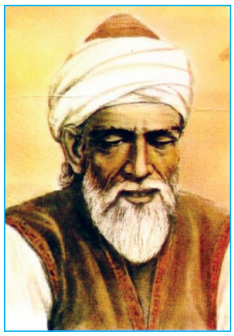
## Dörtgen

**Neler Öğreneceğiz?**

- Dörtgenlerin temel özelliklerini
- Dışbükey ve içbükey dörtgenleri
- Dörtgenin iç ve dış açılarının özelliklerini
- Dörtgenin çevresini bulmayı

Günlük Hayat Bağlantısı

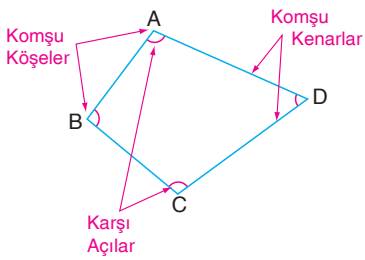
10. yüzyılda yaşamış büyük matematik alimi Ebu'l Vefa, yaptığı çalışmalarla geometriye yeni boyutlar kazandırmıştır. Kısmen Hint modellerine dayalı olarak ortaya koyduğu çizimleri, geometri bakımından önem taşır. Ebu'l Vefa'nın çizim geometrisi ile ilgili yaptığı çalışmalardan bazıları pergelle çember içine pergelin açıklığını bozmadan kare çizmek, bir doğru parçasını pergel kullanarak iki eş parçaya ayırmak ve verilen bir kare içine eşkenar üçgen çizmektir.



***Ebu'l Vefa (940 – 998)***
*(Temsilî resimdir.)*

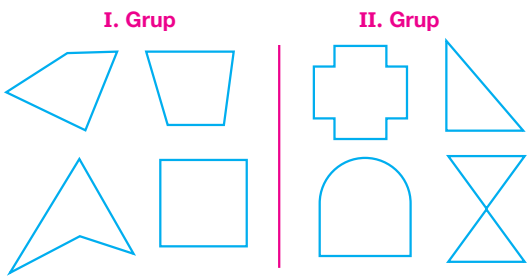
Geometrinin gelişmesine fayda sağlayan başka hangi bilim adamlarını tanıyorsunuz? Bu bilim adamları hangi eserleri veya görüşleriyle geometri bilimine katkı sağlamışlardır?

- *Düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan dört noktayı birleştiren, dört doğru parçasından oluşan kapalı şekle dörtgen denir.*
- *Yandaki dörtgende;*
  - $[AB] \cup [BC] \cup [CD] \cup [DA] = ABCD$,
  - $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ ve $[DA]$ *dörtgenin kenarları,*
  - $A$, $B$, $C$ ve $D$ *dörtgenin köşeleri,*
  - $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ ve $\widehat{D}$ *dörtgenin iç açılarıdır.*
- *Açı, köşe ve kenar dörtgenin temel elemanlarıdır.*
- *Dörtgenin herhangi iki açısı, köşesi veya kenarı ya komşudur ya da karşılıklıdır.*




### 1. Örnek

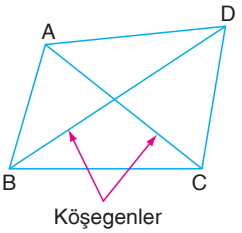
Yanda verilen "I. Grup" taki şekiller dört köşeli ve dört kenarlı kapalı şekiller olduğundan dörtgendir. "II.Grup" taki son iki şekil çokgen değildir. Diğer iki şeklin ise köşe ve kenar sayısı dört değildir. Bu yüzden "II. Grup" taki şekiller dörtgen değildir.



## İnceleyelim

**I.** Dörtgenin karşılıklı iki köşesini birleştiren doğru parçasına köşegen denir.

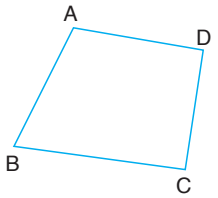
Yandaki [AC] ve [BD] doğru parçaları ABCD dörtgeninin köşegenleridir.



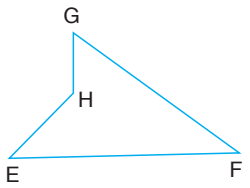
Köşegenler

**II.** Her bir iç açısının ölçüsü 180° den küçük olan dörtgene dışbükey dörtgen, herhangi bir iç açısının ölçüsü 180° den büyük olan dörtgene içbükey dörtgen denir.

*Şekil 1*




*Şekil 2*




İç açılarının ölçüsü 180° den küçük olduğundan "Şekil 1"deki ABCD dörtgeni dışbükey dörtgendir. "Şekil 2"deki GHEF dörtgenin H köşesindeki iç açısı 180° den büyük olduğundan içbükey dörtgendir.

**UYARI**

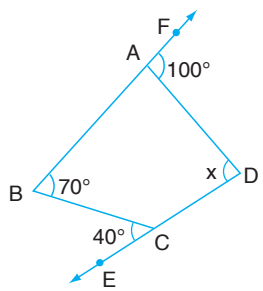
Bundan sonra bu kitapta dörtgen denildiğinde dışbükey dörtgen anlaşılmalıdır.

*n kenarlı çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı (n – 2) . 180° ve n = 4 için, (4 – 2) . 180° = 360° dir.*

- *Bir dörtgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.*
- *Bir dörtgenin dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.*

## 2. Örnek

**ABCD dörtgeninde $m(\widehat{FAD}) = 100°$, $m(\widehat{FBC}) = 70°$ ve $m(\widehat{BCE}) = 40°$ olduğuna göre $m(\widehat{ADE}) = x$'in kaç derece olduğunu bulalım.**



**Çözüm**

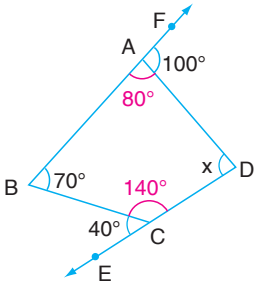
$m(\widehat{BAD}) = 180° - 100° = 80°$ dir.

$m(\widehat{BCD}) = 180° - 40° = 140°$ dir.

Dörtgende iç açıların ölçüleri toplamı 360° olduğundan,

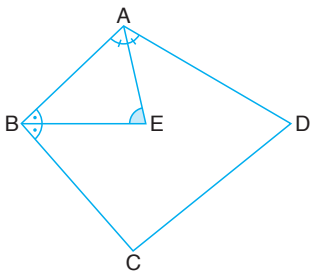
$80° + 70° + 140° + x = 360° \Rightarrow 290° + x = 360°$

$\Rightarrow x = 70°$ bulunur.




*Bir dörtgende komşu iki iç açının açıortayları arasındaki açının ölçüsü, diğer iki iç açısının ölçüleri toplamının yarısıdır.*

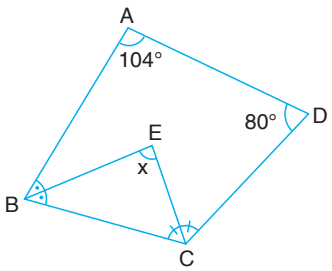
$$m(\widehat{AEB}) = \frac{m(\widehat{D}) + m(\widehat{C})}{2}$$




**Yukarıdaki özelliğin doğruluğunu, yukarıdaki ABE üçgeninin ve ABCD dörtgeninin iç açıları ölçüleri toplamından faydalanarak gösteriniz.**

## 3. Örnek

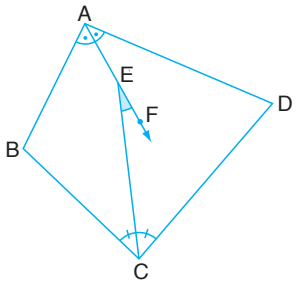
**ABCD dörtgeninde [BE] ve [CE] iç açıortaylar, $m(\widehat{A}) = 104°$, $m(\widehat{D}) = 80°$ olduğuna göre $m(\widehat{BEC}) = x$'in kaç derece olduğunu bulalım.**




**Çözüm**

ABCD dörtgeninde [BE] ve [CE] açıortay olduğundan,

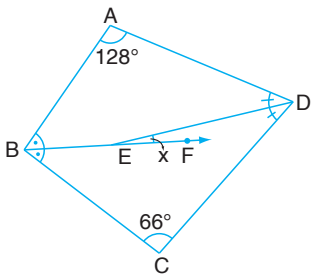
$$m(\widehat{BEC}) = \frac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{D})}{2} \Rightarrow x = \frac{104° + 80°}{2} = 92°$$ elde edilir.




*Bir dörtgende karşılıklı iki iç açının açıortaylarının oluşturduğu dar açının ölçüsü, diğer iki iç açının ölçülerinin farkının mutlak değerinin yarısına eşittir.*

$$m(\widehat{CEF}) = \frac{\left|m(\widehat{B}) - m(\widehat{D})\right|}{2}$$

**Yukarıdaki özelliğin doğruluğunu, yandaki ABCE ve ABCD dörtgenlerinin iç açıları ölçüleri toplamından yararlanarak gösteriniz.**




**4. Örnek**

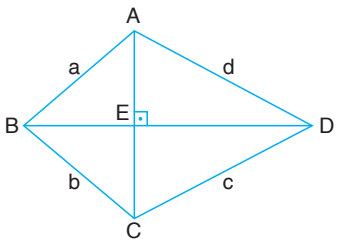
**ABCD dörtgeninde [BF ve [DE] iç açıortaylar, $m(\widehat{A}) = 128°$, $m(\widehat{C}) = 66°$ olduğuna göre $m(\widehat{DEF}) = x$'in kaç derece olduğunu bulalım.**

**Çözüm**

ABCD dörtgeninde [BF ve [DE] açıortay olduğundan,

$$m(\widehat{DEF}) = \frac{\left|m(\widehat{A}) - m(\widehat{C})\right|}{2} \Rightarrow x = \frac{\left|128° - 66°\right|}{2}$$

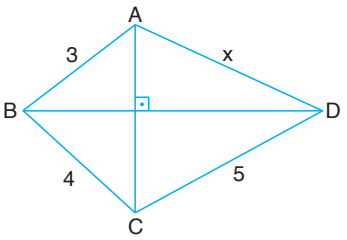
$$\Rightarrow x = 31° \text{ elde edilir.}$$




*Köşegenleri dik kesişen bir dörtgende karşılıklı kenarların uzunluklarının kareleri toplamı birbirine eşittir.*

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \text{ dir.}$$

**Yukarıdaki özelliğin doğruluğunu, yandaki tüm dik üçgenlerde Pisagor teoremini uygulayarak gösteriniz.**




**5. Örnek**

**ABCD dörtgeninde $[AC] \perp [BD]$, $|AB| = 3$ br, $|BC| = 4$ br ve $|CD| = 5$ br olduğuna göre $|AD| = x$'in kaç birim olduğunu bulalım.**

**Çözüm**

ABCD dörtgeninde $[AC] \perp [BD]$ olduğundan,

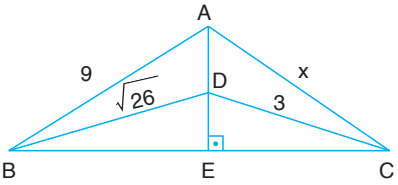
$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |AD|^2$ dir.

$3^2 + 5^2 = 4^2 + x^2 \Rightarrow 34 = 16 + x^2$

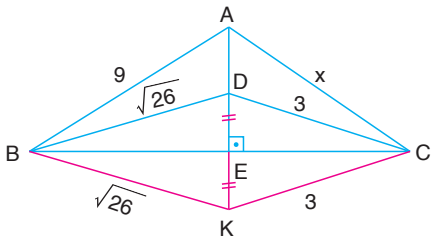
$\Rightarrow x = 3\sqrt{2}$ br bulunur.

## 6. Örnek

**ABC üçgeninde $[AE] \perp [BC]$, $|AB| = 9$ br, $|BD| = \sqrt{26}$ br ve $|DC| = 3$ br olduğuna göre $|AC| = x$'in kaç birim olduğunu bulalım.**




### Çözüm




BCD üçgeninin $[BC]$ kenarına göre simetriğini alırsak yandaki ABKC dörtgeni elde edilir.

ABKC dörtgeninde $[AK] \perp [BC]$ olduğundan,

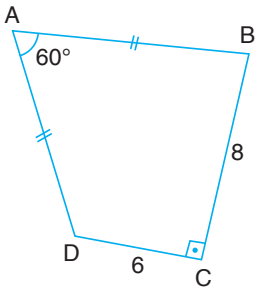
$|BK|^2 + |AC|^2 = |AB|^2 + |KC|^2$

$(\sqrt{26})^2 + x^2 = 9^2 + 3^2 \Rightarrow x^2 = 64$

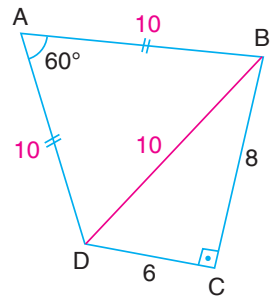
$\Rightarrow$ 8 br elde edilir.

## 7. Örnek

**ABCD dörtgeninde $|AB| = |AD|$, $m(\widehat{A}) = 60°$, $[DC] \perp [BC]$, $|DC| = 6$ cm ve $|BC| = 8$ cm olduğuna göre Ç(ABCD)'nin kaç cm olduğunu bulalım.**




### Çözüm




$[BD]$'nı çizelim. BCD dik üçgeninde,

$|BD|^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow |BD| = 10$ cm'dir.

$m(\widehat{A}) = 60°$ ve $|AD| = |AB|$ olduğundan ABD eşkenar üçgen olur. O hâlde,

$|AD| = |AB| = |BD| = 10$ cm'dir.

Bu durumda,

Ç(ABCD) = 10 + 8 + 6 + 10

= 34 cm bulunur.

**Hatırlayalım**

Bir dörtgenin çevresi, dört kenar uzunluğunun toplamına eşittir.

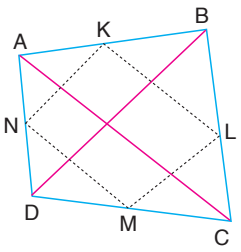
## 8. Örnek

Ağacı ve ormanı korumak uygarlığın en temel göstergesidir. Gelecek nesillere bırakılabilecek en değerli miras yaşanabilecek bir ortam hazırlamak ve onu korumaktır. Ağacın, fidanın ve ormanın bu kadar önemli olduğu bir dünyada yeşil alanlara sahip çıkmak ve yeni orman alanları oluşturmak herkesin vatandaşlık görevidir.

Bir okul, ağaç dikimini teşvik etmek amacıyla "Herkesin Dikili Bir Ağacı Olsun" projesi kapsamında fidan dikme etkinliği gerçekleştirdi. Bunun için köşegen uzunlukları 120 m ve 160 m olan dörtgen şeklindeki bir arazinin orta noktalarını çitlerle birleştirerek oluşan dörtgen şeklindeki alana bir hatıra ormanı oluşturuldu ve fidanlar bu alana dikildi.

**Buna göre hatıra ormanı için belirlenen dörtgen şeklindeki bölgenin çevresini metre cinsinden bulalım.**

**Çözüm**




ABCD dörtgeni köşegen uzunlukları $|AC| = 160$ m ve $|BD| = 120$ m olan araziyi temsil etsin. K, L, M ve N; ABCD dörtgeninin kenarlarının orta noktaları olmak üzere KLMN dörtgeni hatıra ormanının oluşturulacağı alandır. Ç(KLMN)'yi bulmalıyız.

ABC üçgeninde [KL] orta taban oluduğundan,

$$|KL| = \frac{|AC|}{2} = \frac{160}{2} = 80 \text{ m'dir.}$$

Benzer şekilde,

$$|NM| = \frac{|AC|}{2} = \frac{160}{2} = 80 \text{ m ve}$$

$$|NK| = |ML| = \frac{|BD|}{2} = \frac{120}{2} = 60 \text{ m bulunur.}$$

O hâlde $Ç(KLMN) = |KL| + |LM| + |MN| + |NK|$

$= 80 + 60 + 80 + 60$

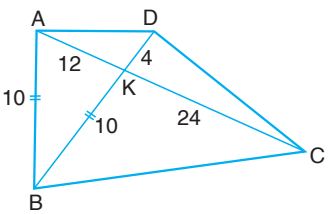
$= 280$ m bulunur.

**Bunları Biliyor musunuz?**

Düzlemsel bir bölgenin, geometrik şekiller kullanılarak şekillerin arasında boşluk bırakılmadan ve şekiller çakışmadan kaplanmasına tesselasyon denir. Yukarıdaki tesselasyon örneğinde çeşitli dörtgenler kullanılmıştır. Tesselasyona antik mimaride, modern sanatta, zemin kaplamalarında veya bir arı peteğinde rastlanabilir.

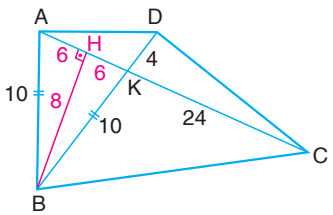
## 9. Örnek

**ABCD dörtgeninde $[AC] \cap [BD] = \{K\}$, $|AB| = |BK| = 10$ br, $|AK| = 12$ br, $|KC| = 24$ br ve $|KD| = 4$ br olduğuna göre ABCD dörtgeninin alanını birimkare cinsinden bulalım.**



**Çözüm**

BKA üçgeni ikizkenar üçgen olduğundan, $[BH] \perp [AC]$ çizilirse $|AH| = |HK| = 6$ br olur.




BHK dik üçgeninde Pisagor teoremine göre,

$10^2 = |BH|^2 + 6^2 \Rightarrow |BH|^2 = 64$

$\Rightarrow |BH| = 8$ br olur.

$A(\widehat{ABK}) = \dfrac{|AK| \cdot |BH|}{2} = \dfrac{12 \cdot 8}{2} = 48\ br^2$ bulunur.

$A(\widehat{BKC}) = 2 \cdot A(\widehat{ABK}) = 2 \cdot 48 = 96\ br^2$ bulunur.

$A(\widehat{AKD}) = \dfrac{2}{5} \cdot A(\widehat{ABK}) = \dfrac{2}{5} \cdot 48 = 19{,}2\ br^2$ bulunur.

$A(\widehat{DKC}) = \dfrac{2}{5} \cdot A(\widehat{BKC}) = \dfrac{2}{5} \cdot 96 = 38{,}4\ br^2$ bulunur.

$\dfrac{A(\widehat{ABK})}{A(\widehat{BKC})} = \dfrac{|AK|}{|KC|} = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{A(\widehat{ABK})}{A(\widehat{AKD})} = \dfrac{|BK|}{|KD|} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$

$\dfrac{A(\widehat{BKC})}{A(\widehat{DKC})} = \dfrac{|BK|}{|KD|} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$

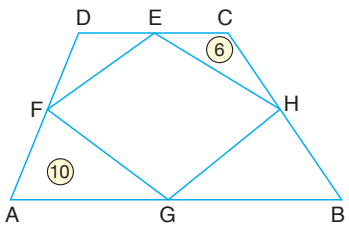
O hâlde $A(ABCD) = A(\widehat{ABK}) + A(\widehat{BKC}) + A(\widehat{AKD}) + A(\widehat{DKC})$

$= 48 + 96 + 19{,}2 + 38{,}4 = 201{,}6\ br^2$ bulunur.

---

**10. Örnek**

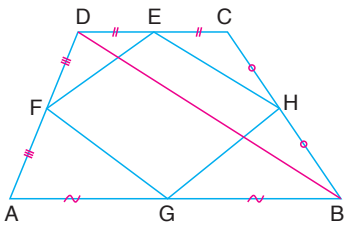
**ABCD dörtgen; E, F, G, H bulundukları kenarların orta noktaları, $A(\widehat{AFG}) = 10\ br^2$ ve $A(\widehat{HCE}) = 6\ br^2$ olduğuna göre $A(ABCD)$'nı birimkare cinsinden bulalım.**




**Çözüm**

ABCD dörtgeninde $[BD]$ köşegenini çizelim.

$\left.\begin{matrix}[EH] \,//\, [BD] \\ \widehat{ECH} \sim \widehat{DCB}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \dfrac{|EC|}{|DC|} = \dfrac{1}{2}$ ve $\dfrac{A(\widehat{ECH})}{A(\widehat{DCB})} = \dfrac{1}{4}$ olur.




Buna göre $A(\widehat{ECH}) = 6\ br^2$ ise $A(\widehat{DCB}) = 24\ br^2$ dir.

Benzer durum ADB üçgeninde de geçerli olup $A(\widehat{AFG}) = 10\ br^2$ ise, $A(\widehat{ADB}) = 40\ br^2$ dir. O hâlde,

$A(ABCD) = A(\widehat{DCB}) + A(\widehat{ADB})$

$= 24 + 40$

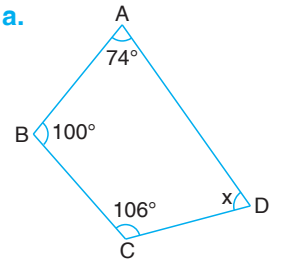
$= 64\ br^2$ bulunur.

---

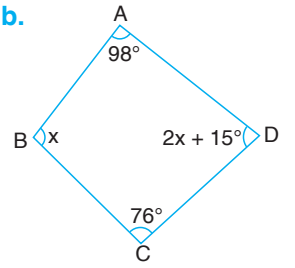
## 5.2.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdaki ABCD dörtgenlerinde verilenlere göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

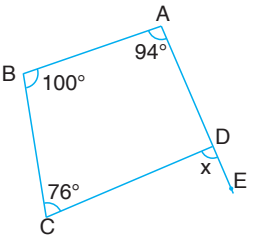
**a.**




**b.**

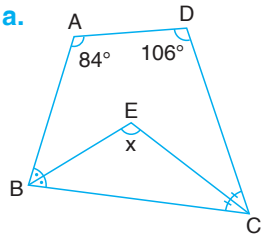



**c.**

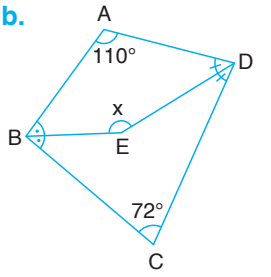



**2.** Aşağıdaki ABCD dörtgenlerinde [BE], [CE], [DE] açıortay olmak üzere şekillerde verilenlere göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

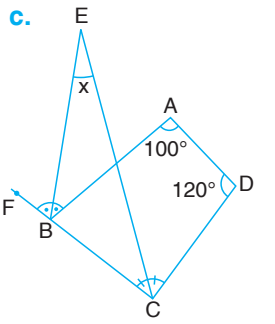
**a.**




**b.**

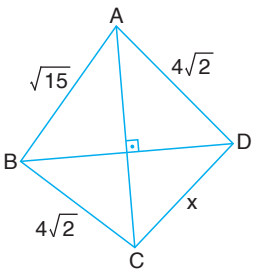



**c.**

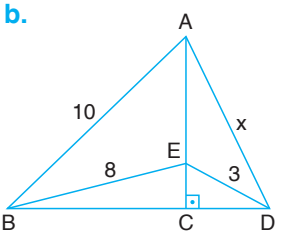



**3.** Aşağıdaki ABCD dörtgenlerinde [AC] ⊥ [BD] olmak üzere şekillerde verilenlere göre x'in kaç birim olduğunu bulunuz.

**a.**

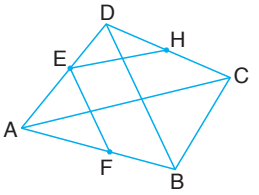



**b.**



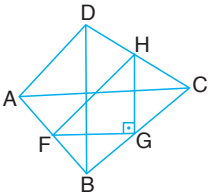

**4.** Aşağıdaki ABCD dörtgenlerinde [AC] ve [BD] köşegen; E, F, G, H bulundukları kenarların orta noktaları ise verilenlere göre istenilenleri birim cinsinden bulunuz.

**a.**




$$\left.\begin{array}{l}|AC| = 20 \text{ br} \\ |BD| = 16 \text{ br}\end{array}\right\} \Rightarrow |EH| + |EF| = ?$$

**b.**

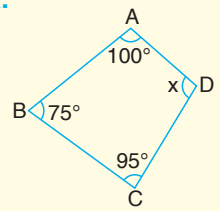



$$\left.\begin{array}{l}|AC| = 10 \text{ br} \\ |BD| = 24 \text{ br}\end{array}\right\} \Rightarrow |FH| = ?$$

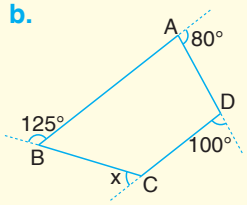
# 5.2 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI

**1.** Aşağıdaki dörtgenlerde verilenlere göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

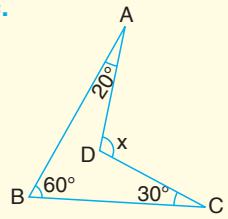
**a.**



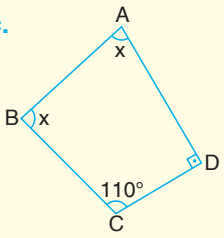

**b.**




**c.**

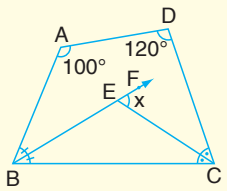



**ç.**

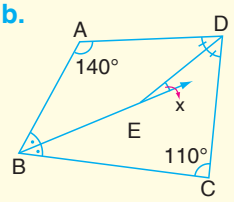



**2.** Aşağıdaki dörtgenlerde verilenlere göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

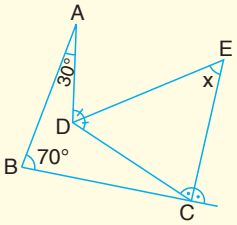
**a.**



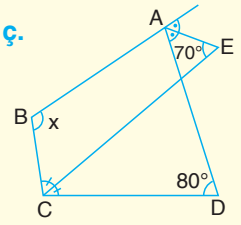

**b.**




**c.**

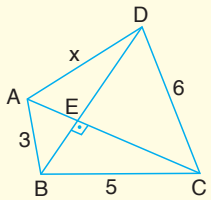



**ç.**

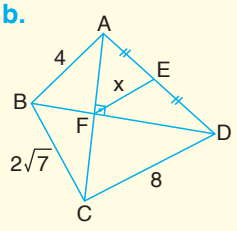



**3.** Aşağıdaki dörtgenlerde verilenlere göre x'in kaç birim olduğunu bulunuz.

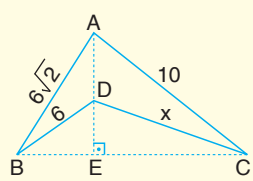
**a.**



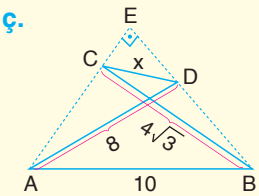

**b.**



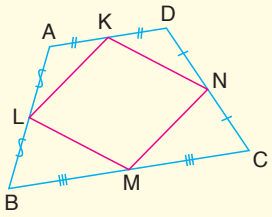

**c.**




**ç.**




**4.** ABCD dörtgeninde K, L, M ve N bulundukları kenarların orta noktalarıdır. Buna göre aşağıdaki noktalı yerleri uygun şekilde tamamlayınız.

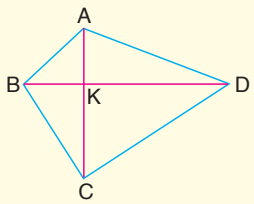



**a.** $A(\widehat{AKL}) = 4$ br$^2$ ve $A(\widehat{CNM}) = 6$ br$^2$ ise $A(ABCD) =$ .....

**b.** $A(\widehat{BLM}) = 12$ br$^2$ ve $A(\widehat{DKN}) = 8$ br$^2$ ise $A(KLMN) =$ .....

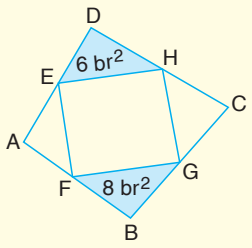
**c.** $A(ABCD) = 80$ br$^2$ ve $A(\widehat{DKN}) = 8$ br$^2$ ise $A(\widehat{BLM}) =$ .....

**5.** Yandaki ABCD dörtgeninde $[AC] \cap [BD] = \{K\}$, $5|BK| = 3|KD|$ olduğuna göre $\dfrac{A(\widehat{ACD})}{A(ABCD)}$ oranı kaçtır?



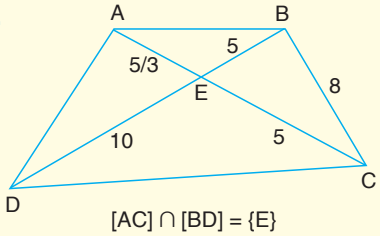

**6.** Aşağıda verilenlere göre istenen alanları birimkare cinsinden bulunuz.

**a.**




E, F, G, H orta noktalar
A(EFGH) = ?

**b.**




$[AC] \cap [BD] = \{E\}$
A(ABCD) = ?

KONU 5.3

# ÖZEL DÖRTGENLER

**Neler Öğreneceğiz?**

- Yamuk, paralelkenar, eşkenar dörtgen, dikdörtgen, kare ve deltoid ile ilgili açı, kenar, köşegen ve alan özelliklerini
- Yamuk, paralelkenar, eşkenar dörtgen, dikdörtgen, kare ve deltoid arasındaki hiyerarşik ilişkiyi

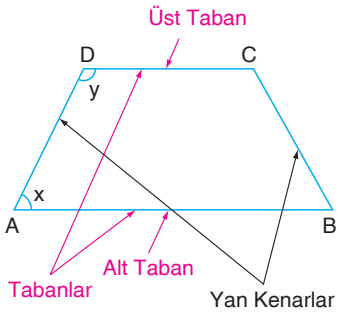
## Yamuk

Günlük Hayat Bağlantısı

Dünyada bilinen ilk halılar Orta Asya'da Türkler tarafından dokunmuştur. Bu halıların günümüze kadar ulaşabilmiş en eski örneği Hermitage (Hörmetiç) Müzesi'nde saklanmakta ve MÖ 6 ya da 5. yüzyıllarda dokunmuş olduğu bilinmektedir.

Yandaki fotoğrafta görülen 19. yy.da dokunmuş Çanakkale yöresine ait halıda bulunan dörtgenlerle oluşturulmuş motiflere hayat ağacı, ejderha, kuş vb. anlamlar yüklenmiştir.

Hermitage Müzesi, Petersburg



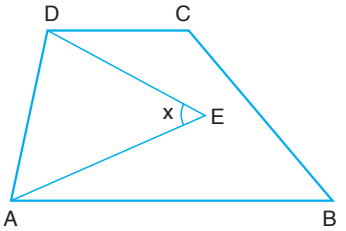

*En az iki kenarı paralel olan dörtgene yamuk denir.*

- *Yamuğun paralel kenarlarına yamuğun tabanları, paralel kenarların karşılıklı uç noktalarını birleştiren doğru parçalarına yan kenarları denir.*
- *Bir yamukta bir yan kenarla tabanların oluşturduğu iç açıların ölçüleri toplamı 180° dir.*

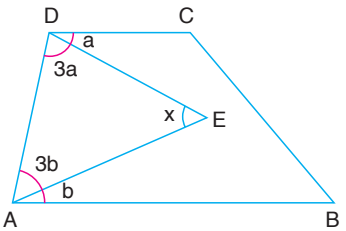
  *ABCD paralelkenarında [AB] // [DC] ve x + y = 180° dir.*

### 1. Örnek

**ABCD yamuğunda [AB] // [DC], $m(\widehat{EDA}) = 3 \cdot m(\widehat{EDC})$ ve $m(\widehat{EAD}) = 3 \cdot m(\widehat{EAB})$'dir. Buna göre $m(\widehat{DEA})$ = x'in kaç derece olduğunu bulalım.**




**Çözüm**




$m(\widehat{EDC}) = a$ olsun.

$m(\widehat{EDA}) = 3 \cdot m(\widehat{EDC}) = 3a$ olur.

$m(\widehat{EAB}) = b$ olsun.

$m(\widehat{EAD}) = 3 \cdot m(\widehat{EAB}) = 3b$ olur.

ABCD yamuğunda $[AB] // [DC]$ olduğundan,

$m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{ADC}) = 180° \Rightarrow 4b + 4a = 180°$

$\Rightarrow a + b = 45°$ dir.

ADE üçgeninde, $3a + 3b + x = 180° \Rightarrow 3(a + b) + x = 180°$

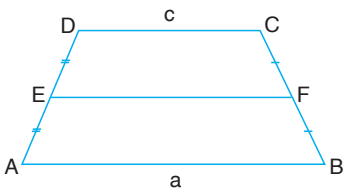
$\Rightarrow 3 \cdot 45° + x = 180°$

$\Rightarrow x = 45°$ bulunur.

## Orta Taban

- *Bir yamukta paralel olmayan kenarların orta noktalarını birleştiren doğru parçasına orta taban denir.*
- *Bir yamukta orta tabanın uzunluğu, alt ve üst taban uzunluklarının toplamının yarısına eşittir.*

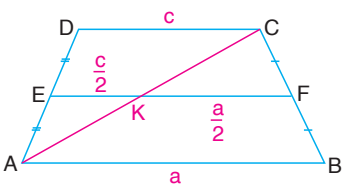
$$|EF| = \frac{|AB| + |CD|}{2} = \frac{a + c}{2} \text{ 'dir.}$$



[AB] // [DC]

### İspat

ABCD yamuğunda $|AB| = a$ birim ve $|CD| = c$ birim olmak üzere $[AC]$ köşegeni ile $[EF]$ orta tabanı K noktasında kesişsin.




ABC üçgeninde,

$$\left.\begin{matrix}[KF] // [AB] \\ |CF| = |FB|\end{matrix}\right\} \Rightarrow |KF| = \frac{a}{2} \text{ ...(I)}$$

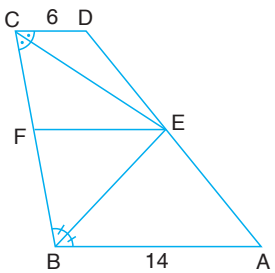
ACD üçgeninde,

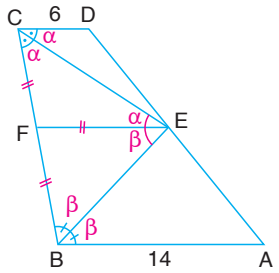
$$\left.\begin{matrix}[KE] // [CD] \\ |DE| = |EA|\end{matrix}\right\} \Rightarrow |KE| = \frac{c}{2} \text{ ...(II)}$$

**I** ve **II** eşitliklerinden, $|EF| = \frac{a + c}{2}$ elde edilir.

### 2. Örnek

**ABCD yamuk, [EC] ve [BE] açıortay, [AB] // [EF] // [CD], |AB| = 14 br ve |CD| = 6 br olduğuna göre |EF|'nun kaç birim olduğunu bulalım.**






**Çözüm**

$m(\widehat{BCE}) = m(\widehat{ECD}) = \alpha$ ve $m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{EBC}) = \beta$ olsun.

$[AB] // [EF] // [CD] \Rightarrow \begin{cases} m(\widehat{ECD}) = m(\widehat{CEF}) = \alpha & \textit{(iç ters açı)} \\ m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{BEF}) = \beta & \textit{(iç ters açı)} \end{cases}$

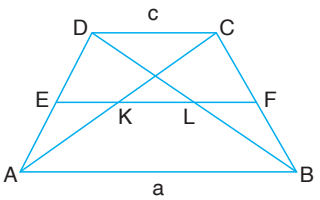
Buna göre,

EFC ve BEF ikizkenar üçgen olup $|CF| = |FE|$ ve $|BF| = |FE|$'dir.

$\left.\begin{matrix} [EF] // [AB] // [CD] \\ |BF| = |FC| \end{matrix}\right\} \Rightarrow [EF]$ orta taban olup $|EF| = \dfrac{|AB| + |CD|}{2}$

$= \dfrac{14 + 6}{2}$

$= 10$ br bulunur.




$[AB] // [DC]$

*Yamuğun orta tabanının köşegenler arasında kalan parçasının uzunluğu,*

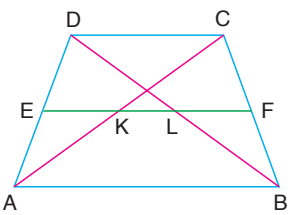
$$|KL| = \frac{|AB| - |CD|}{2} = \frac{a - c}{2}\text{'dir.}$$

**Yukarıdaki özelliğin doğruluğunu gösteriniz.**

**İpucu:** $|EK|$, $|LF|$ ve $|EF|$ uzunluklarını a veya c cinsinden ifade ediniz.

## 3. Örnek

**ABCD yamuğunda $[DC] // [AB]$, $[EF]$ orta taban, $|EF| = 11$ cm ve $|KL| = 5$ cm olduğuna göre $|AB|$'nun kaç santimetre olduğunu bulalım.**




**Çözüm**

$|AB| = a$ br ve $|DC| = c$ br olsun.

$[EF]$ orta taban ise $|EF| = \dfrac{|AB| + |DC|}{2} \Rightarrow 11 = \dfrac{a + c}{2}$

$\Rightarrow 22 = a + c$'dir. ... **(I)**

Diğer yandan $|KL| = \dfrac{|AB| - |DC|}{2} \Rightarrow 5 = \dfrac{a - c}{2}$

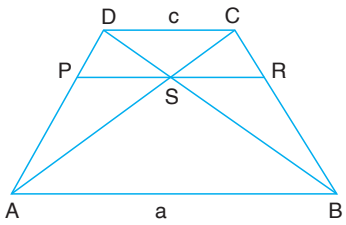
$\Rightarrow 10 = a - c$'dir. ... **(II)**

**I** ve **II**'deki eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$2a = 32 \Rightarrow |AB| = a = 16$ cm olur.

### 5.3.1 Kritik Düşünme

Yanda ABCD yamuk, $[AC] \cap [BD] = \{S\}$ ve $[PR] // [AB] // [CD]$ olduğuna göre $[PR]$'nın uzunluğunu a ve c cinsinden yazınız.

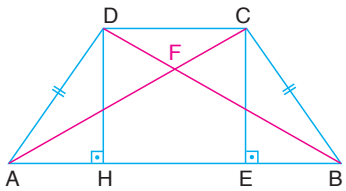



## İkizkenar Yamuk

- *Paralel olmayan kenarlarının uzunlukları birbirine eşit olan yamuğa ikizkenar yamuk denir.*
- *İkizkenar yamuğun;*
  - ***i.*** *Taban açılarının ölçüleri birbirine eşittir.*

    $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B})$
  - ***ii.*** *Köşegen uzunlukları birbirine eşittir.*

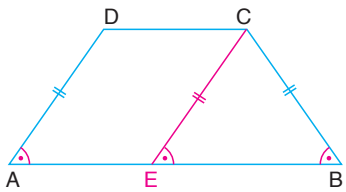
    $|AC| = |DB|$




$[AB] // [DC]$

## İspat

**i.** Yandaki ikizkenar yamukta $[CE] // [DA]$ olacak şekilde $[CE]$'nı çizelim.




Oluşan AECD dörtgeni paralelkenar ve $|AD| = |CE| = |CB|$ olur. Ayrıca,

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{CEB})$ *(yöndeş açılar)* ... **(I)**

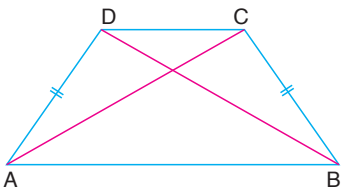
$m(\widehat{CEB}) = m(\widehat{B})$ *($\widehat{CEB}$ ikizkenar üçgen)* ... **(II)** elde edilir.

**I** ve **II** eşitliklerinden $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B})$'dir.

Benzer şekilde $m(\widehat{D}) = m(\widehat{C})$ olduğu da gösterilir.

**ii.** İkizkenar yamukta taban açılarının ölçüleri eşit olacağından,

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{B})$'dir.



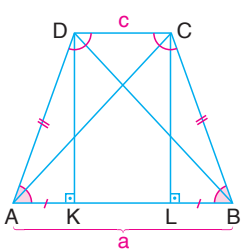

$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) \\ |BC| = |AD| \\ |AB| = |BA| \end{array}\right\} \Rightarrow$ K.A.K eşlik teoremine göre $\widehat{ABC} \cong \widehat{BAD}$'dir.

Eş üçgenlerin karşılıklı kenarları da eş olacağından $|AC| = |BD|$ bulunur.

**Yukarıdaki ispattan aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir.**

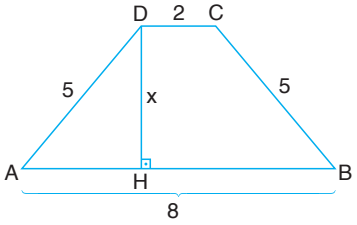
*ABCD ikizkenar yamuğunda,*

- $|AD| = |BC|$
- $|AC| = |BD|$
- $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B})$, $m(\widehat{D}) = m(\widehat{C})$
- $|AK| = |LB| = \dfrac{a-c}{2}$'dir.

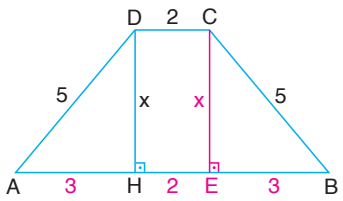


## 4. Örnek

**ABCD ikizkenar yamuk, [AB] // [CD], [DH] ⊥ [AB], |AD| = |BC| = 5 br, |AB| = 8 br ve |CD| = 2 br olduğuna göre |DH| = x'in kaç birim olduğunu bulalım.**




**Çözüm**



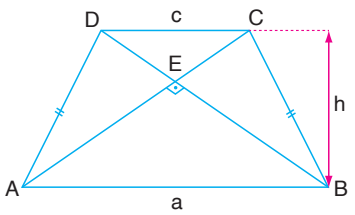

C noktasından [CE] ⊥ [AB] olacak şekilde [CE]'nı çizelim.

$$\left.\begin{array}{l}[CD] \,//\, [AB] \\ [DH] \perp [AB] \\ [CE] \perp [AB]\end{array}\right\} \Rightarrow |HE| = |DC| = 2 \text{ br ve}$$

$$|AH| = |EB| = \frac{|AB| - |HE|}{2} = \frac{8-2}{2} = 3 \text{ br olur.}$$

AHD dik üçgeninde Pisagor teoremine göre,

$$|AD|^2 = |AH|^2 + |HD|^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + x^2$$
$$\Rightarrow x = 4 \text{ br bulunur.}$$




[AB] // [DC]

*Bir ikizkenar yamukta köşegenler dik kesişiyor ise yamuğun yüksekliği, tabanların uzunlukları toplamının yarısına eşittir.*

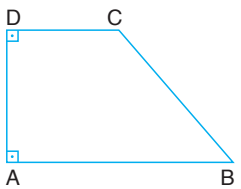
$$\left.\begin{array}{l}|AD| = |BC| \\ [AC] \perp [BD]\end{array}\right\} \textit{ise } h = \frac{a+c}{2}\textit{'dir.}$$

**Yukarıdaki özelliğin doğruluğunu gösteriniz.**

**İpucu:** **1.** Şekildeki yamuğun E noktasından geçen yüksekliğini çizip [KL] şeklinde isimlendiriniz.

**2.** |KE| ve |EL|'nu a veya c cinsinden ifade ediniz.

### Dik Yamuk

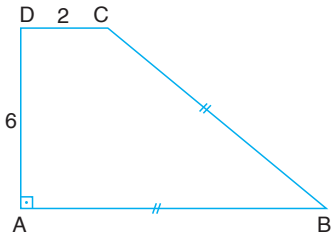



*Paralel olmayan kenarlarından biri tabanlara dik olan yamuğa dik yamuk denir. Yandaki dik yamukta,*

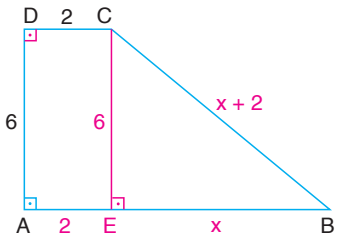
- *[DA] ⊥ [AB], [DA] ⊥ [DC]'dir.*
- *[DA] yamuğun yüksekliğidir.*

## 5. Örnek

**ABCD dik yamuk, [DC] // [AB], [DA] ⊥ [AB], |BC| = |AB| ve |DA| = 3|DC| = 6 br olduğuna göre |AB|'nun kaç birim olduğunu bulalım.**




**Çözüm**




C noktasından [CE] ⊥ [AB] olacak şekilde [CE]'nı çizelim.

$$\left.\begin{array}{l}[DC] \,//\, [AB] \\ [DA] \perp [AB] \\ [CE] \perp [AB]\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}|AE| = |DC| = 2 \text{ br ve} \\ |CE| = |DA| = 6 \text{ br dir.}\end{array}$$

$|EB| = x$ olmak üzere

$|AB| = |BC| = (x + 2)$ br olur.

CEB dik üçgeninde Pisagor teoremine göre,

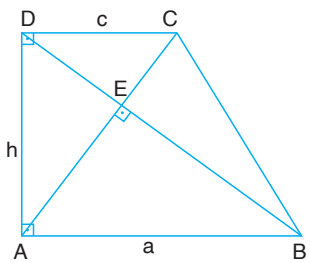
$$|CB|^2 = |CE|^2 + |EB|^2 \Rightarrow (x+2)^2 = 6^2 + x^2$$
$$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 36 + x^2$$
$$\Rightarrow x = 8 \text{ br olur.}$$

O hâlde $|AB| = x + 2 = 8 + 2 = 10$ br bulunur.

---

*Köşegenleri dik kesişen dik yamuğun yüksekliğinin karesi alt ve üst taban uzunluklarının çarpımına eşittir. ABCD dik yamuğunda,*

$$[BD] \perp [AC] \Rightarrow |AD|^2 = |DC| . |AB|$$
$$\Rightarrow h^2 = a \cdot c \text{'dir.}$$



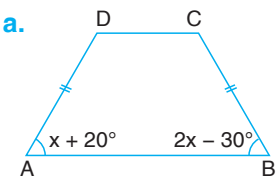

**Yukarıdaki özelliğin doğruluğunu gösteriniz.**

**İpucu:** Yandaki yamukta ADC ve BAD üçgenlerinin benzer olduğunu gösteriniz.

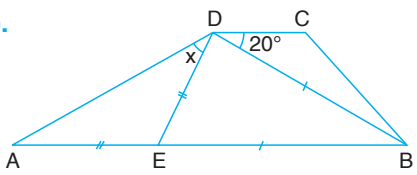
### 5.3.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdaki ABCD yamuklarında [AB] // [DC] ise şekillerde verilenlere göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

**a.**

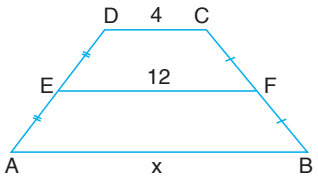



**b.**

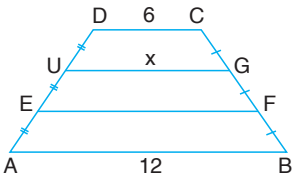


**2.** Aşağıdaki ABCD yamuklarında [AB] // [DC] ise şekillerde verilenlere göre x'in kaç birim olduğunu bulunuz.

**a.**

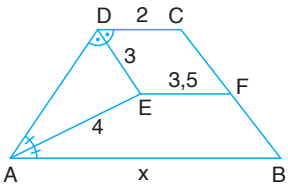



**b.**

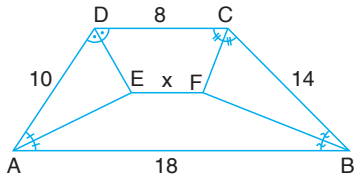



**3.** Aşağıdaki ABCD yamuklarında [AB] // [DC] // [EF] ise şekillerde verilenlere göre x'in kaç birim olduğunu bulunuz.

**a.**

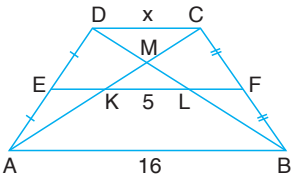



**b.**

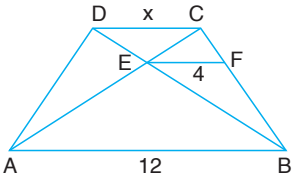



**4.** Aşağıdaki ABCD yamuklarında [AB] // [EF] // [DC] ise şekillerde verilenlere göre x'in kaç birim olduğunu bulunuz.

**a.**

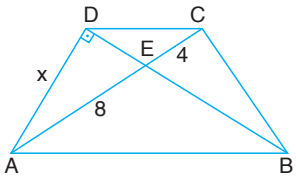



**b.**

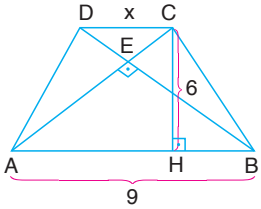



**5.** Aşağıdaki ABCD yamuklarında [AB] // [DC] ve |DA| = |CB| ise şekillerde verilenlere göre x'in kaç birim olduğunu bulunuz.

**a.**

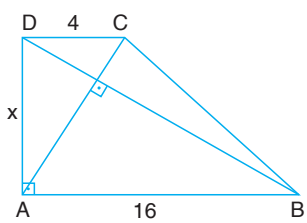



**b.**

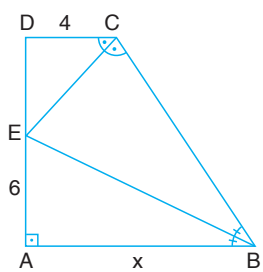



**6.** Aşağıdaki ABCD dik yamuklarında [AB] // [DC] ve [DA] ⊥ [AB] ise verilenlere göre x'in kaç birim olduğunu bulunuz.

**a.**



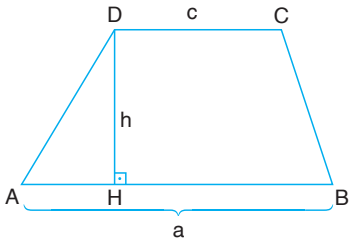

**b.**



## Yamukta Alan Bağıntıları

*Bir yamuğun alanı, taban uzunlukları toplamının yarısı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir.*

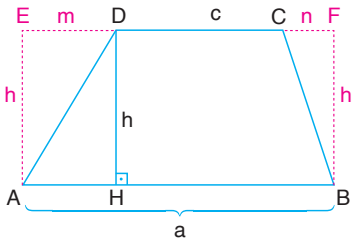
$$A(ABCD) = \frac{a+c}{2} \cdot h$$




[AB] // [DC]

### İspat

[DC]'nı uzatarak ABCD yamuğunu içeren en küçük dikdörtgeni çizelim. Bu dikdörtgeni ABFE şeklinde isimlendirelim.




$|ED| = m$ ve $|CF| = n$ olsun.

$|EA| = |FB| = h$ olur.

$$A(\widehat{AED}) + A(ABCD) + A(\widehat{CBF}) = A(ABFE)$$

$$A(ABCD) = A(ABFE) - A(\widehat{AED}) - A(\widehat{CBF})$$

$$= a \cdot h - \frac{m \cdot h}{2} - \frac{n \cdot h}{2}$$

$$= \frac{2 \cdot a \cdot h - m \cdot h - n \cdot h}{2}$$

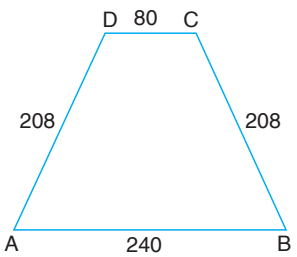
$$= \frac{h \cdot (a + \overbrace{a - m - n}^{c})}{2}$$

$$= \frac{(a+c)}{2} \cdot h \text{ bulunur.}$$

### 6. Örnek

İnkaların mimari bir yapıda kullandığı ikizkenar yamuk şeklindeki kapının modeli yanda verilmiştir.

**Paralel olan kenarlarının uzunlukları 80 cm ve 240 cm, paralel olmayan kenarlarının uzunluğu 208 cm olan yamuğun alanını bulalım.**

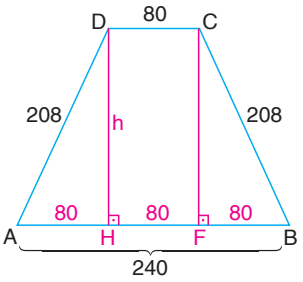



**Bunları Biliyor musunuz?**

İnkalar tarih öncesi uygarlıklar arasında en çok merak edilen uygarlıklardan biridir. Eski zamanlarda yaşamalarına rağmen arkalarında bıraktıkları yapılar ve sistemlerle aslında gelişkin ve çağ ötesi bir medeniyet oldukları görülmektedir.

İnka mimarisi hassaslık, kullanışlılık ve sadelik olmak üzere üç temel kavram üzerine kurulmuştur. İnkalar mimari yapılarında ikizkenar yamuk şeklindeki kapı ve pencereler kullanmışlardır.

**Çözüm**




D ve C noktalarından yükseklikler indirildiğinde $|HF| = |DC| = 80$ cm olur.

ABCD ikizkenar yamuk olduğundan,

$$|AH| = |FB| = \frac{|AB| - |DC|}{2}$$

$$= \frac{240 - 80}{2} = 80 \text{ cm} \text{ elde edilir.}$$

$|DH| = h$ olmak üzere AHD dik üçgeninde Pisagor teoremine göre,

$$|AD|^2 = |AH|^2 + |HD|^2 \Rightarrow 208^2 = 80^2 + h^2$$

$$\Rightarrow h = 192 \text{ cm} \text{ bulunur.}$$

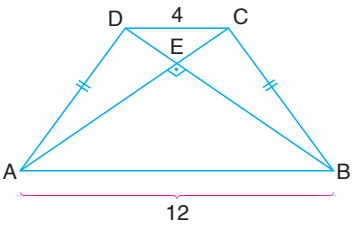
Buna göre ABCD yamuğunun alanı,

$$A(ABCD) = \frac{a + c}{2} \cdot h = \frac{240 + 80}{2} \cdot 192$$

$$= 30720 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

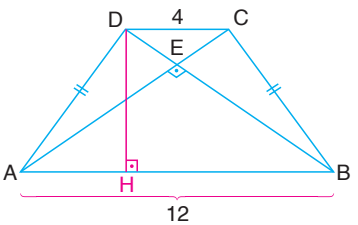
## 7. Örnek

**ABCD ikizkenar yamuk, [AB] // [CD], |AD| = |CB|, [AC] ⊥ [BD] ve |AB| = 3|DC| = 12 br olduğuna göre A(ABCD)'nı br² cinsinden bulalım.**




**Çözüm**

[DH] ⊥ [AB] olacak şekilde [DH]'nı çizelim.




ABCD ikizkenar yamuk, [AC] ⊥ [BD] olduğundan,

*Köşegenleri dik kesişen ikizkenar yamuğun yüksekliği, tabanların uzunlukları toplamının yarısına eşittir.*

$$|DH| = \frac{|AB| + |CD|}{2}$$

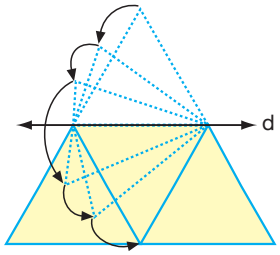
$$= \frac{12 + 4}{2} = 8 \text{ br} \text{ bulunur.}$$

$$A(ABCD) = \frac{|AB| + |DC|}{2} \cdot |DH|$$

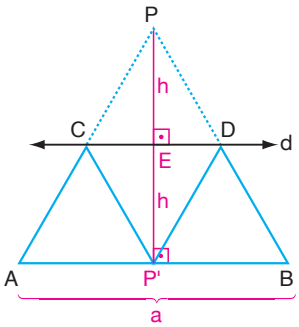
$$= \frac{12 + 4}{2} \cdot 8 = 64 \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

## 8. Örnek

**Alanı 20 cm² olan üçgen şeklindeki kâğıt, üçgenin bir kenarına paralel olan d doğrusu boyunca, köşesi tabanı üzerine gelecek şekilde katlanıyor. Buna göre oluşan yamuğun alanını cm² cinsinden bulalım.**




**Çözüm**




d doğrusu boyunca katlanan üçgen $\widehat{PAB}$ olsun. Üçgen katlandığında P köşesi tabanın üzerine geldiğinden d doğrusu üçgenin orta tabanı olan [CD]'nı içerir.

$|PE| = |EP'| = h$ ve $|AB| = a$ olsun.

$A(\widehat{PAB}) = \dfrac{a \cdot 2h}{2} = 20 \Rightarrow a \cdot h = 20$ ve

$|CD| = \dfrac{a}{2}$ olur.

Oluşan ABDC yamuğunun alanı,

$$A(ABDC) = \frac{|AB|+|DC|}{2} \cdot h$$

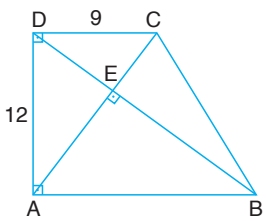
$$= \frac{a + \frac{a}{2}}{2} \cdot h$$

$$= \frac{3 \cdot ah}{4}$$

$$= \frac{3 \cdot 20}{4} = 15\,cm^2 \text{ bulunur.}$$

## 9. Örnek

**ABCD dik yamuk [DC] // [AB], [DA] ⊥ [AB], [AC] ⊥ [BD], |AD| = 12 br ve |DC| = 9 br olduğuna göre A(ABCD)'nı br² cinsinden bulalım.**




**Çözüm**

ABCD dik yamuğunda köşegenler dik kesiştiğinden,

$|AD|^2 = |DC| \cdot |AB|$

$12^2 = 9 \cdot |AB|$

$|AB| = 16$ birim bulunur.

$$A(ABCD) = \frac{|AB|+|DC|}{2} \cdot |AD|$$

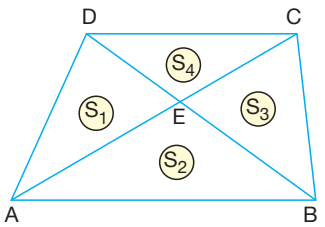
$$= \frac{16+9}{2} \cdot 12$$

$$= 150\ br^2 \text{ dir.}$$

*ABCD yamuğunda [AB] // [CD] ve köşegenlerin yamuk üzerinde oluşturduğu üçgenlerin alanları,*

$A(\widehat{AED}) = S_1$, $A(\widehat{AEB}) = S_2$, $A(\widehat{CEB}) = S_3$ *ve* $A(\widehat{DEC}) = S_4$ *ise;*

$$S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$$ *'dir.*




**İspat**

Yandaki DAC ve DCB üçgenlerinin, [DC] tabanları ortak ve bu tabanlara ait yükseklikleri eş olduğundan,

$A(\widehat{DAC}) = A(\widehat{DCB}) \Rightarrow S_1 + S_4 = S_3 + S_4 \Rightarrow S_1 = S_3$ olur. ...**(I)**

ABE ile AED üçgenlerinin alanları oranının $\frac{S_2}{S_1} = \frac{|EB|}{|ED|}$ olduğunu biliyoruz.

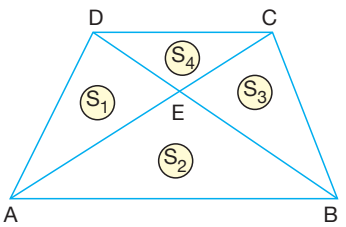
Benzer şekilde $\frac{S_3}{S_4} = \frac{|EB|}{|ED|}$ olur.

Buna göre $\frac{S_2}{S_1} = \frac{S_3}{S_4}$ olup $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ ...**(II)** bulunur.

**I** ve **II** den $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$ elde edilir.

**10. Örnek**

**ABCD yamuğunda [AB] // [CD], [AC] ve [DB] köşegenler, $S_4 = 3$ br$^2$ ve $S_2 = 12$ br$^2$ olduğuna göre A(ABCD)'nı br$^2$ cinsinden bulalım.**




**Çözüm**

$S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$ olduğunu biliyoruz.

Buna göre,

$S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$

$= \sqrt{12 \cdot 3}$

$= 6$ br$^2$ dir.

$A(ABCD) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$

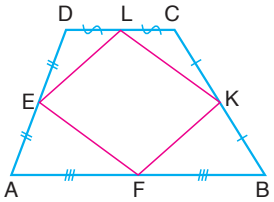
$= 6 + 12 + 6 + 3$

$= 27$ br$^2$ bulunur.

*ABCD yamuğunda E, F, K ve L noktaları bulundukları kenarların orta noktaları ise;*

***i.*** *EFKL dörtgeni paralelkenardır.*

***ii.*** $A(EFKL) = \frac{A(ABCD)}{2}$*'dir.*

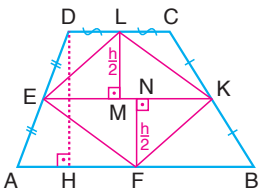


[AB] // [DC]

**Yukarıdaki özelliğin doğruluğunu gösteriniz.**

**İpucu:** **1.** [AC] köşegenini çizerek [EL] ve [FK]'nın sırasıyla $\overset{\frown}{EDL}$ ve $\overset{\frown}{KFB}$'nin orta tabanı olduğunu gösteriniz.

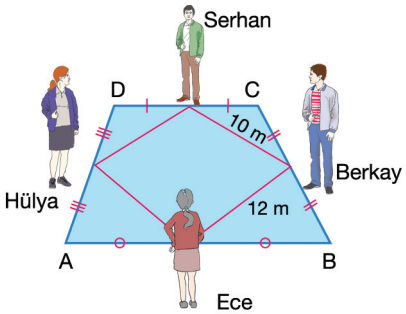
**2.** Yandaki şekli kullanınız.




## 11. Örnek

Şekilde ABCD dörtgeni şeklindeki bahçenin kenarlarının orta noktalarında duran Ece, Serhan, Hülya ve Berkay gösterilmiştir.

**Berkay'ın Ece'ye ve Serhan'a olan uzaklıkları sırasıyla 12 m ve 10 m olduğuna göre Hülya'nın Ece ve Serhan'a olan uzaklıkları toplamının kaç metre olduğunu bulalım.**



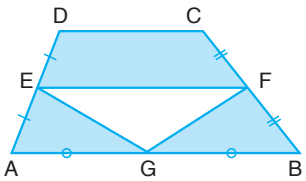
### Çözüm

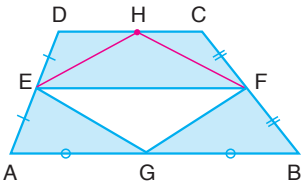
Bir dörtgenin kenar orta noktaları birleştirildiğinde oluşan dörtgen bir paralelkenar olur. Buna göre Berkay ile Ece arasındaki uzaklık, Serhan ile Hülya arasındaki uzaklığa, Berkay ile Serhan arasındaki uzaklık ise Hülya ile Ece arasındaki uzaklığa eşittir.

O hâlde Hülya'nın Ece ve Serhan'a olan uzaklıkları toplamı,
10 + 12 = 22 m bulunur.

## 12. Örnek

**ABCD yamuğunda [AB] // [DC]; E, G ve F bulundukları kenarların orta noktalarıdır. ABCD yamuğunun alanı 24 br² olduğuna göre mavi boyalı bölgenin alanının kaç br² olduğunu bulalım.**






**Çözüm**

[DC] kenarına ait orta noktayı E ve F noktaları ile birleştirelim. Bu durumda EGFH bir paralelkenar olur. EHFG paralelkenarının alanı yamuğun alanının yarısıdır. [EF] köşegeni ile paralelkenarının alanı iki eş parçaya ayrılır. Buna göre,

$$A(EHFG) = \frac{A(ABCD)}{2} = \frac{24}{2} = 12\,br^2 \text{ ve}$$

$$A(\widehat{EFG}) = \frac{A(EHFG)}{2} = \frac{12}{2} = 6\,br^2 \text{ dir.}$$

Mavi boyalı bölge, yamuğun alanından EFG üçgeninin alanının çıkarılmasıyla bulunduğundan istenilen alan,

$24 - 6 = 18\ br^2$ bulunur.

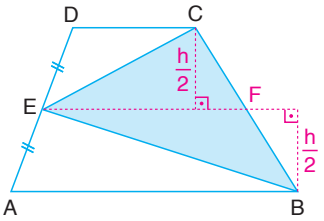
---

*Bir yamukta paralel olmayan kenarlardan birinin orta noktasını köşe, diğer yan kenarını taban kabul eden üçgenin alanı, yamuğun alanının yarısına eşittir.*

*ABCD yamuğunda [AB] // [DC] olmak üzere*

$$A(\widehat{BEC}) = \frac{A(ABCD)}{2} \text{ dir.}$$

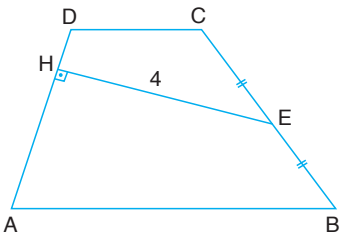
---



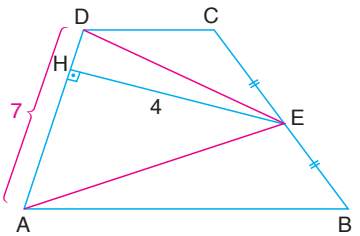

$$A(\widehat{ECB}) = A(\widehat{ECF}) + A(\widehat{EBF})$$
$$= \frac{1}{2}|EF| \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{2}|EF| \cdot \frac{h}{2}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot |EF| \cdot h$$
$$= \frac{A(ABCD)}{2}$$

## 13. Örnek

**ABCD yamuk, [AB] // [CD], |BE| = |EC|, |AD| = 7 br ve |EH| = 4 br olduğuna göre A(ABCD)'nı $br^2$ cinsinden bulalım.**




**Çözüm**




[DE] ve [AE]'nı çizelim.

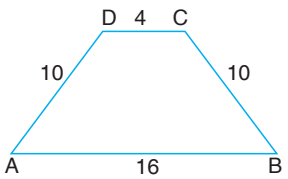
$$A(\widehat{ADE}) = \frac{|AD| \cdot |EH|}{2}$$
$$= \frac{7 \cdot 4}{2} = 14\,br^2 \text{ dir.}$$

$$A(ABCD) = 2 \cdot A(\widehat{ADE})$$
$$= 2 \cdot 14 = 28\ br^2 \text{ bulunur.}$$

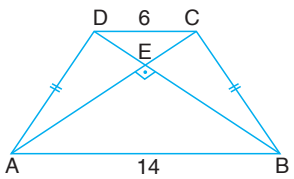
## 5.3.2 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdaki ABCD yamuklarında [AB] // [DC] ise verilenlere göre A(ABCD)'nın kaç $br^2$ olduğunu bulunuz.

**a.**

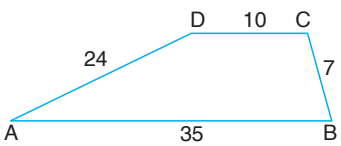



**b.**

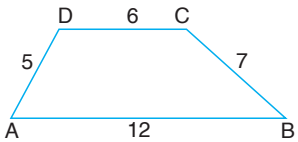



**2.** Aşağıdaki ABCD yamuklarında [AB] // [DC] ise verilenlere göre A(ABCD)'nın kaç $br^2$ olduğunu bulunuz.

**a.**

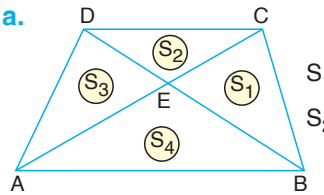



**b.**



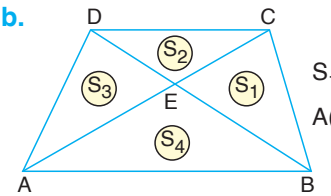

**3.** Aşağıdaki ABCD yamuklarında [AB] // [DC]; [AC] ve [BD] köşegen; $S_1$, $S_2$, $S_3$ ve $S_4$ bulundukları bölgelerin alanları olmak üzere istenen bölgelerin alanlarını $br^2$ cinsinden bulunuz.

**a.**




$S_1 = 12\ br^2$
$S_2 = 4\ br^2$
$\Rightarrow S_4 = ?$

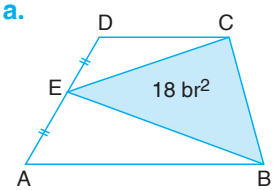
**b.**




$S_1 = 10\ br^2$
$A(ABCD) = 49\ br^2$
$\Rightarrow S_4 = ?$

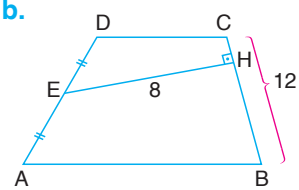
**4.** Aşağıdaki ABCD yamuklarında [AB] // [DC] olmak üzere istenen bölgelerin alanlarını $br^2$ cinsinden bulunuz.

**a.**




A(ABCD) = ?

**b.**

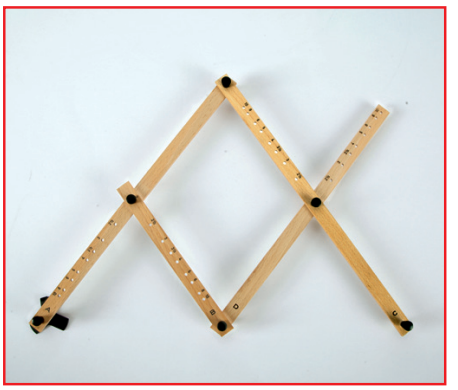


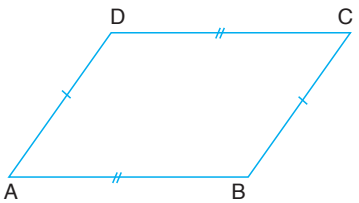

A(ABCD) = ?

## Paralelkenar

Günlük Hayat Bağlantısı

Pantograf ilk kez 17. yüzyılda kullanılmaya başlamıştır. Pantograf bir deseni ya da bir yazıyı belli oranda küçültüp büyütmenin yanı sıra bire bir kopyasını da çıkarmaya yarayan, yapısında paralelkenar kolları barındıran bir araçtır. Pantograf yapısındaki paralel kollar sayesinde ileri ve geri hareket edebilir.






- *Karşılıklı kenarları paralel olan dörtgenlere paralelkenar denir.*
- *Bir paralelkenarda karşılıklı kenarların uzunlukları eşittir.*

*ABCD paralelkenarında,*

***i.*** *[AB] // [CD] ve [BC] // [DA]*

***ii.*** $|AB| = |CD|$ ve $|BC| = |DA|$*'dır.*

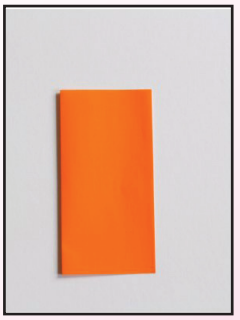
### 5.3.1 Etkinlik

Origami, Japonca oru (katlama) ve kami (kâğıt) kelimelerinin birleşmesiyle meydana gelmiş "katlanmış kâğıt" anlamına gelen geleneksel kâğıt katlama sanatıdır. Origami sanatında makas ve yapıştırıcı kullanmadan kâğıdı sadece katlayarak çeşitli şekiller oluşturulur.

- Aşağıda origami ile kare şeklindeki bir elişi kâğıdından paralelkenar elde edilmesinin adımları gösterilmiştir. Adımları takip ederek siz de bir paralelkenar oluşturunuz.

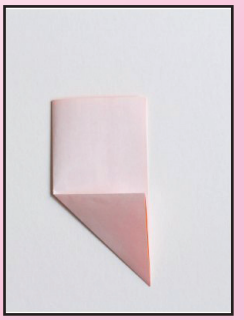
**1. Adım**

Kâğıdı renkli kısım üstte olacak şekilde ikiye katlayınız.



**2. Adım**

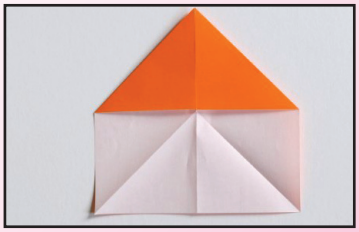
Kâğıdı açıp beyaz tarafı görünecek şekilde tekrar katlayınız. Kâğıdı kapalı tarafından açık tarafa doğru (resimde soldan sağa doğru) katlayınız.



### 3. Adım

Kâğıdı renkli kısım arkada kalacak şekilde açınız.

Üstteki iki köşeyi kâğıdın tam ortasında buluşacak şekilde katlayınız.

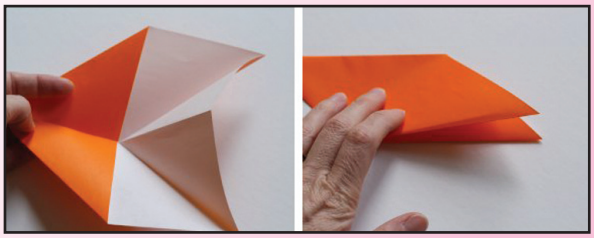


### 4. Adım

Kâğıdı ikiye katlayınız.

Kâğıdın alt kenarının ortasından 2. adımda oluşturduğunuz üçgen ¨kâğıdın katları arasında kalacak şekilde itiniz.

Oluşan şekil bir paralelkenardır.



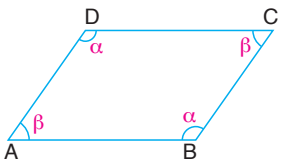
### Analiz

1. Oluşan paralelkenarın kısa ve uzun kenarlarının uzunluğunu, kare kâğıdın bir kenarının uzunluğu cinsinden yazınız.
2. Kullanılan kare elişi kâğıdının bir kenarının uzunluğu 10 cm ise oluşan paralelkenarın çevresi kaç cm dir?

   **İpucu:** Kâğıdı tamamen açarak kat izlerini kullanınız.

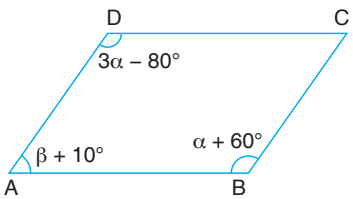
- *Paralelkenarda karşılıklı açıların ölçüleri eşittir.*
- *Paralelkenarda komşu açılar bütünlerdir.*

  $\alpha + \beta = 180°$




### 14. Örnek

**ABCD paralelkenar $m(\widehat{A}) = \beta + 10°$, $m(\widehat{B}) = \alpha + 60°$ ve $m(\widehat{D}) = 3\alpha - 80°$ olduğuna göre $\alpha - \beta$'nın kaç derece olduğunu bulalım.**




### Çözüm

ABCD paralelkenar olup,

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{D}) \Rightarrow \alpha + 60° = 3\alpha - 80°$

$\alpha = 70°$ dir.

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 180° \Rightarrow \beta + 10° + \alpha + 60° = 180°$

$\Rightarrow \beta + 10° + 70° + 60° = 180°$

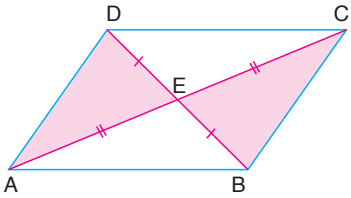
$\Rightarrow \beta = 40°$ olur.

Buna göre $\alpha - \beta = 70° - 40° = 30°$ elde edilir.

*Bir paralelkenarda köşegenler birbirini ortalar.*

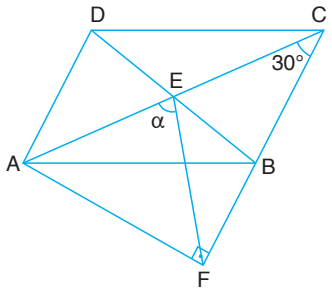
*ABCD paralelkenarında [AC] ve [DB] köşegen olmak üzere,*

$|EA| = |EC|$ ve $|ED| = |EB|$ dir.

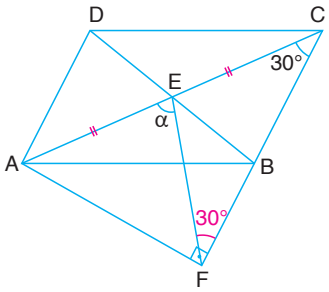



**15. Örnek**

**ABCD paralelkenar; F, B, C doğrusal noktalar; [AC] ve [BD] köşegen; $[AF] \perp [FC]$ ve $m(\widehat{FCA}) = 30°$ olduğuna göre $m(\widehat{FEA}) = \alpha$'nın kaç derece olduğunu bulalım.**




**Çözüm**




ABCD paralelkenarında [AC] ve [BD] köşegen olduğundan $|AE| = |EC|$'dir.

AFC dik üçgeninde [EF] kenarortay olup $|FE| = |AE| = |EC|$'dir.

O hâlde CEF ikizkenar üçgen olduğundan, $m(\widehat{CFE}) = m(\widehat{ECF}) = 30°$ olur.

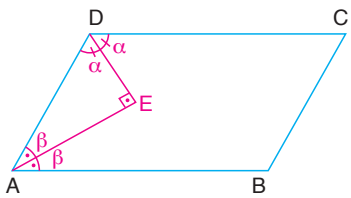
$\alpha = 30° + 30° = 60°$ bulunur.

*Bir paralelkenarda komşu açıların açıortayları birbirine diktir.*

*ABCD paralelkenarında [DE] ve [AE] açıortay olmak üzere*

$2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$ *ve*

$m(\widehat{E}) + \alpha + \beta = 180° \Rightarrow m(\widehat{E}) = 90°$ *dir.*



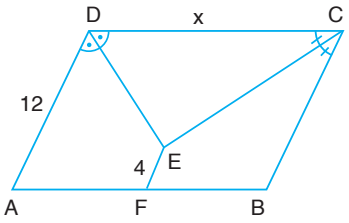
**16. Örnek**

ABCD paralelkenar, $[EF] // [BC]$,

$m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{CDE})$,

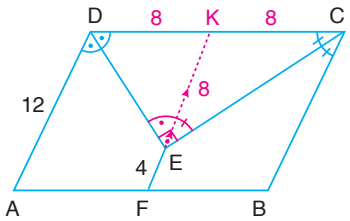
$m(\widehat{DCE}) = m(\widehat{BCE})$,

$|DA| = 12$ birim ve $|EF| = 4$ birimdir.




**Buna göre, $|DC| = x$'in kaç birim olduğunu bulalım.**

**Çözüm**




$[DE]$ ve $[EC]$ açıortay olduğundan

$m(\widehat{DEC}) = 90°$ dir.

$[EF]$'nı içeren doğrunun $[DC]$'nı kestiği nokta K olsun.

$[FK] // [AD]$ ve

$|KE| = |AD| - |EF| = 12 - 4 = 8$ br olur.

$[KE] // [DA] // [CB]$ olduğundan

$m(\widehat{KDE}) = m(\widehat{KED})$ ve $m(\widehat{KCE}) = m(\widehat{KEC})$ olur.

$\widehat{KDE}$ ikizkenar üçgen olduğundan

$|KD| = |KE| = 8$ birimdir.

$\widehat{KCE}$ ikizkenar üçgen olduğundan

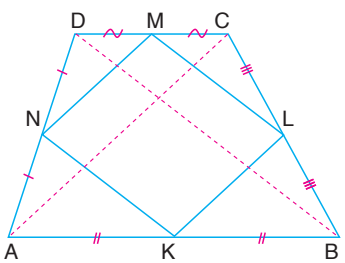
$|KC| = |KE| = 8$ birimdir.

O hâlde $|DC| = |KC| + |KD| = 8 + 8 = 16$ birimdir.

*Herhangi bir dörtgenin kenarlarının orta noktalarının ardışık olarak birleştirilmesiyle elde edilen dörtgen bir paralelkenardır.*

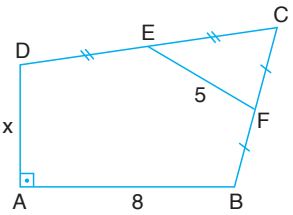
*ABCD dörtgeninde K, L, M ve N bulundukları kenarların orta noktaları olmak üzere,*

- *KLMN paralelkenardır.*
- *Ç(KLMN) = |AC| + |BD|'dir.*

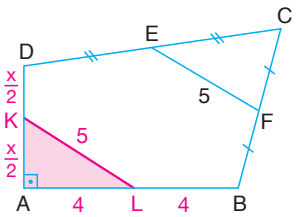


## 17. Örnek

**ABCD dörtgeninde [AD] ⊥ [AB], E ve F bulundukları kenarların orta noktaları, |EF| = 5 br ve |AB| = 8 br olduğuna göre |AD| = x'in kaç birim olduğunu bulalım.**




**Çözüm**




[AD] ve [AB] kenarlarının orta noktalarını birleştirip bu doğru parçasını [KL] olarak adlandıralım.

Bir dörtgende kenar orta noktalarının birleştirilmesiyle bir paralelkenar oluşacağından ve paralelkenarda karşılıklı kenar uzunlukları eşit olduğundan |EF| = |KL| = 5 br olur.

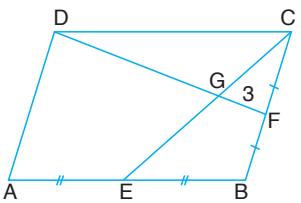
KAL dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa,

$$|KL|^2 = |AK|^2 + |AL|^2 \Rightarrow 5^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 4^2$$

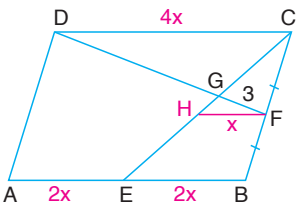
$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} = 9 \Rightarrow x = 6 \text{ br bulunur.}$$

## 18. Örnek

**ABCD paralelkenar, [DF] ∩ [CE] = {G}, |AE| = |EB|, |BF| = |FC| ve |FG| = 3 br olduğuna göre |GD|'nun kaç birim olduğunu bulalım.**




**Çözüm**




F noktasından [FH] // [AB] olacak şekilde [FH]'nı çizelim.

EBC üçgeninde [FH] orta taban olup |FH| = x ise |EB| = 2x'tir.

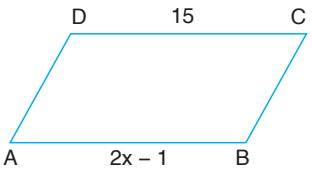
E noktası [AB]nın orta noktası olduğundan, |EB| = |AE| = 2x ⇒ |AB| = |CD| = 4x olur.

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{HGF} \sim \widehat{CGD} \\ 4|HF| = |CD| \end{array}\right\} \Rightarrow |GD| = 4 \cdot |GF| = 4 \cdot 3 = 12 \text{ birim elde edilir.}$$

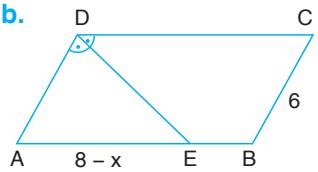
## 5.3.3 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** ABCD paralelkenar olmak üzere şekillerde verilenlere göre x'in kaç birim olduğunu bulunuz.

**a.**

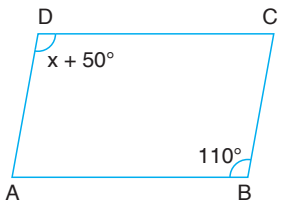



**b.**

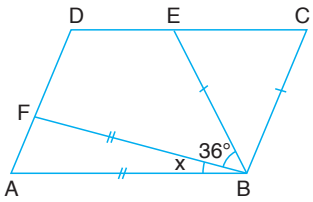



**2.** ABCD paralelkenar olmak üzere şekillerde verilenlere göre x'in kaç birim olduğunu bulunuz.

**a.**

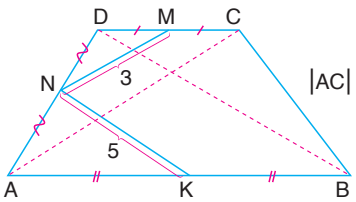



**b.**



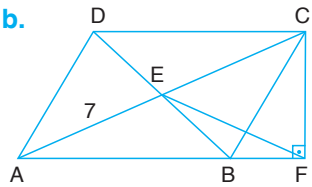

**3.** Aşağıdaki şekillerde verilenlere göre istenenleri birim cinsinden bulunuz.

**a.**




$|AC| + |BD| = ?$

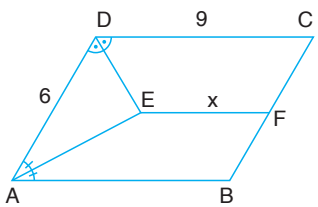
**b.**




ABCD paralelkenar
$|EF| = ?$

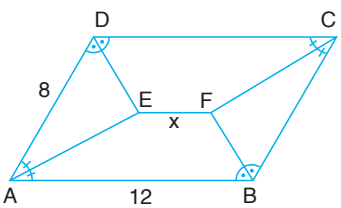
**4.** ABCD paralelkenar olmak üzere şekillerde verilenlere göre x'in kaç birim olduğunu bulunuz.

**a.**




[EF] // [AB]

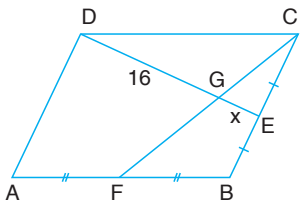
**b.**



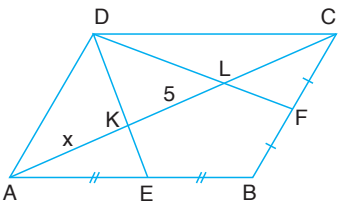

[EF] // [AB]

**5.** ABCD paralelkenar olmak üzere şekillerde verilenlere göre x'in kaç birim olduğunu bulunuz.

**a.**



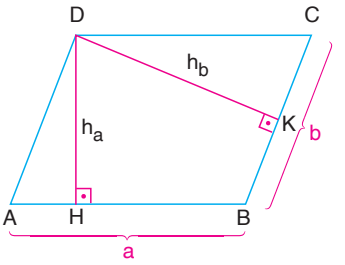

**b.**



## Paralelkenarda Alan Bağıntıları

*Bir paralelkenarın alanı, bir kenar uzunluğu ile o kenara ait yüksekliğinin çarpımına eşittir.*

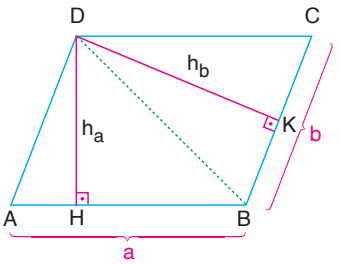
$$A(ABCD) = a \cdot h_a = b \cdot h_b$$




**Bunları Biliyor musunuz?**

İnsanların yaşamını kolaylaştırmak, barınma, dinlenme ve çalışma gibi eylemlerini sürdürebilmelerini sağlamak üzere gerekli mekânları estetik yaratıcılıkla inşa etme sanatına mimarlık adı verilir. Geçen zamanla birlikte mimarlar ortaya alışılmışın dışında yapılar koymaya başlamıştır. Hayatın hemen hemen her alanında karşımıza çıkan matematik, mimarlar tarafından da sıklıkla kullanılmaktadır. Yukarıdaki fotoğrafta Hamburg Limanı'nda bulunan ve yan yüzeyleri paralelkenar şeklinde olan yapı görülmektedir.

### İspat




ABCD paralelkenarında [AB] kenarına ait yükseklik $h_a$, [BC] kenarına ait yükseklik $h_b$ olsun.

[DB] köşegenini çizelim:

K.K.K. eşlik teoremine göre $\widehat{ABD} \cong \widehat{CDB}$ ve $A(\widehat{ABD}) = A(\widehat{CDB})$'dir.

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= A(\widehat{ABD}) + A(\widehat{CDB}) \\ &= A(\widehat{ABD}) + A(\widehat{ABD}) \\ &= 2 \cdot A(\widehat{ABD}) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a \\ &= a \cdot h_a \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Benzer şekilde $A(ABCD) = b \cdot h_b$ olduğu gösterilebilir.

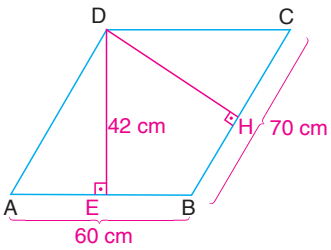
### 19. Örnek

Yanda Anıl'ın bisikletinin fotoğrafı verilmiştir. Fotoğraf üzerinde, bisikletin çatısında bulunan kırmızı çizgi ile belirtilmiş paralelkenarın kenar uzunlukları verilmiş olup bu uzunluklardan kısa olanına ait yükseklik 42 cm'dir.

**Buna göre uzun kenara ait yüksekliği bulalım.**

**Çözüm**

Bisikletin çatısında bulunan kırmızı çizgi ile belirtilmiş paralelkenarın köşelerini A, B, C, D olarak adlandıralım.




Buna göre $|AB| = 60$ cm, $|BC| = 70$ cm'dir.

$[DH] \perp [BC]$ ve $[DE] \perp [AB]$ olacak biçimde $[DH]$ ve $[DE]$ yüksekliklerini çizelim.

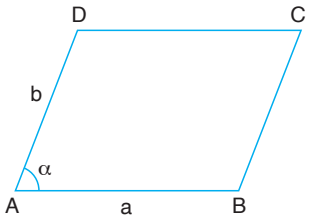
$A(ABCD) = |DE| \cdot |AB| = |DH| \cdot |BC| \Rightarrow 42 \cdot 60 = |DH| \cdot 70$

$\Rightarrow |DH| = 36$ cm bulunur.

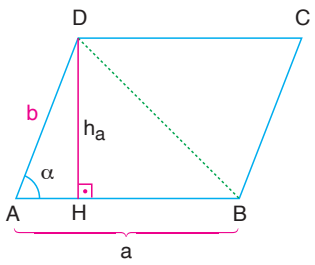
---

*Bir paralelkenarın alanı, iki kenar uzunluğu ile bu kenarların arasındaki açının sinüsünün çarpımına eşittir.*

$$A(ABCD) = a \cdot b \cdot \sin\alpha$$




**İspat**




$m(\widehat{DAB}) = \alpha$ olsun. DAH dik üçgeninde

A açısının sinüsü, $\sin\alpha = \frac{h_a}{b}$'dir.

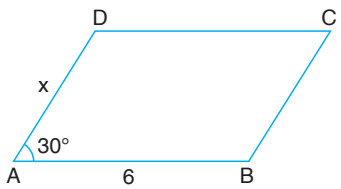
$A(ABCD) = a \cdot h_a$ olduğundan $h_a$ yerine

$h_a = b \cdot \sin\alpha$ yazılırsa,

$A(ABCD) = a \cdot b \cdot \sin\alpha$ bulunur.

**20. Örnek**

**ABCD paralelkenar, $m(\widehat{DAB}) = 30°$, $A(ABCD) = 30$ br$^2$ ve $|AB| = 6$ br olduğuna göre $|AD| = x$'in kaç birim olduğunu bulalım.**




**Çözüm**

$A(ABCD) = a \cdot b \cdot \sin\alpha$ olduğundan,

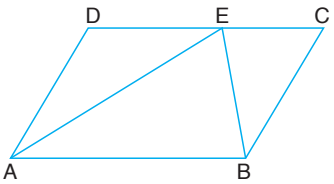
$30 = 6 \cdot x \cdot \sin 30° \quad \left(\sin 30° = \frac{1}{2}\right)$

$30 = 6x \cdot \frac{1}{2}$

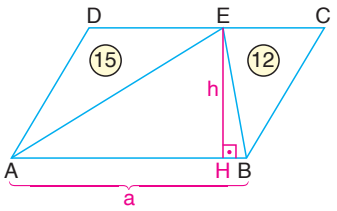
$x = 10$ br bulunur.

## 21. Örnek

**ABCD paralelkenar, E noktası [CD] üzerinde herhangi bir nokta, $A(\widehat{BCE}) = 12\,br^2$, $A(\widehat{AED}) = 15\,br^2$ olduğuna göre $A(ABCD)$'nın kaç $br^2$ olduğunu bulalım.**




**Çözüm**




ABCD paralelkenarının ve $\widehat{AEB}$'nin ortak yüksekliği olan [EH]'nı çizelim.

$|AB| = a$ ve $|EH| = h$ olmak üzere,

$A(\widehat{AEB}) = \dfrac{a \cdot h}{2}$ ve $A(ABCD) = a \cdot h$'dır.

Buna göre,

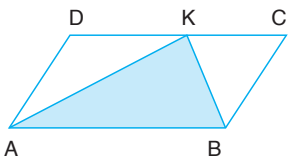
$A(ABCD) = 2A(\widehat{AEB}) \Rightarrow A(\widehat{AEB}) + 12 + 15 = 2A(\widehat{AEB})$

$\Rightarrow A(\widehat{AEB}) = 27\,br^2$ olur.

O hâlde $A(ABCD) = 2A(\widehat{AEB})$

$= 2 \cdot 27$

$= 54\,br^2$ bulunur.



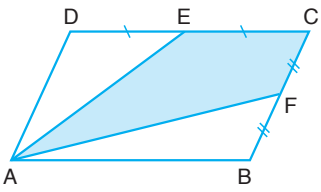

*Paralelkenarın bir kenarını taban, bu kenarın karşısındaki kenarda herhangi bir noktayı da köşe kabul eden üçgenin alanı, paralelkenarın alanının yarısıdır.*

$$A(\widehat{ABK}) = \frac{A(ABCD)}{2} = A(\widehat{ADK}) + A(\widehat{BKC})$$

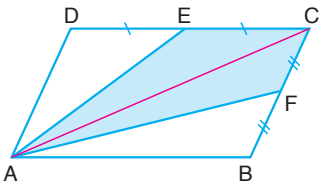
## 22. Örnek

ABCD paralelkenar, E ve F bulundukları kenarların orta noktalarıdır.

**$A(AECF) = 18\,br^2$ olduğuna göre $A(ABCD)$'nın kaç $br^2$ olduğunu bulalım.**



**Çözüm**



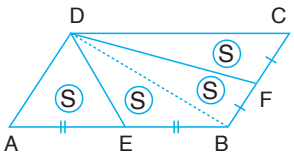

[AC] köşegenini çizdiğimizde oluşan DAC ve BAC üçgenlerinin alanları eşit olur. Ayrıca ADE ve AEC üçgenlerinin taban ve yükseklikleri eş olduğundan alanları eşittir. Benzer şekilde ACF ve AFB üçgenlerinin de alanları eşittir.

Buna göre $A(\widehat{ADE}) = A(\widehat{AEC}) = A(\widehat{ACF}) = A(\widehat{AFB}) = 9\,br^2$ dir.

O hâlde $A(ABCD) = 4 \cdot 9 = 36\,br^2$ bulunur.

*Bir paralelkenarın bir köşesinden çizilen köşegen ve aynı köşe ile komşu olmayan kenarların orta noktalarını birleştiren doğru parçaları, paralelkenarın alanını dört eş parçaya ayırır.*

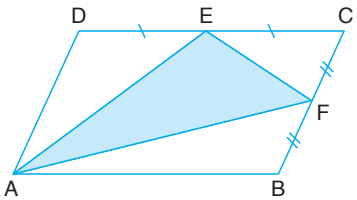
$$A(DEBF) = \frac{A(ABCD)}{2}$$



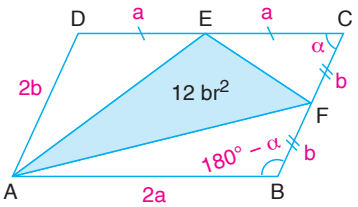

**23. Örnek**

ABCD paralelkenar, E ve F bulundukları kenarların orta noktalarıdır.

**$A(\widehat{AEF}) = 12\,br^2$ olduğuna göre A(ABCD)'nın kaç $br^2$ olduğunu bulalım.**




**Çözüm**




$|AB| = 2a$, $|AD| = 2b$ olsun.

Bu durumda $|DE| = |EC| = a$ ve $|CF| = |FB| = b$ olur.

$m(\widehat{DCB}) = \alpha$ olursa

$m(\widehat{ABC}) = 180° - \alpha$ olur.

Buna göre $A(ABCD) = 2a \cdot 2b \cdot \sin\alpha = 4ab\sin\alpha$'dır.

$A(\widehat{ABF}) = \frac{1}{2}2a \cdot b \cdot \sin(180° - \alpha) = ab\sin\alpha$'dır. *[sin(180° − α) = sinα]*

$A(\widehat{ADE}) = \frac{1}{2}2b \cdot a \cdot \sin(180° - \alpha) = ab\sin\alpha$'dır. *[sin(180° − α) = sinα]*

$A(\widehat{CEF}) = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot \sin\alpha$'dır.

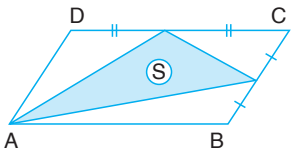
Bulduğumuz bu alanlar bize ABF ve ADE üçgenlerinin alanlarının, paralelkenarın alanının $\frac{1}{4}$'i, CEF üçgeninin alanının da paralelkenar alanının $\frac{1}{8}$'i olduğunu göstermektedir.

Buna göre AEF üçgeninin alanı da paralelkenarın alanının $1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$'üdür. O hâlde,

$$\frac{3}{8}.A(ABCD)=A(\widehat{AEF}) \Rightarrow A(ABCD)=\frac{8}{3}\cdot 12$$

$$\Rightarrow A(ABCD)=32\ br^2 \text{ dir.}$$

*Bir paralelkenarda komşu iki kenarın orta noktaları ve bu kenarlar üzerinde olmayan köşenin birleştirilmesiyle oluşan üçgenin alanı, paralelkenarın alanının $\frac{3}{8}$'üne eşittir.*

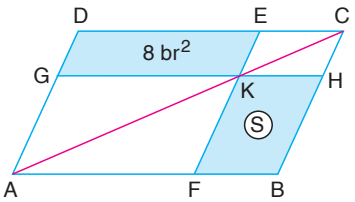



$$S=\frac{3}{8}A(ABCD)$$

**24. Örnek**

ABCD paralelkenar [EF] // [AD], [GH] // [AB] ve [AC] köşegendir.

**A(DEKG) = 8 br² olduğuna göre A(FBHK) = S alanını bulalım.**




**Çözüm**

Paralelkenarda bir köşegenin alanları eşit olan iki üçgen oluşturduğunu biliyoruz. ABCD, AFKG ve KHCE paralelkenar olduğundan,

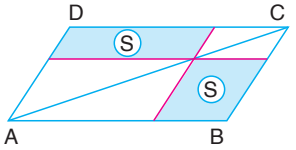
$A(\widehat{ACD})=A(\widehat{ABC})$, $A(\widehat{AFK})=A(\widehat{AKG})$ ve $A(\widehat{KHC})=A(\widehat{KCE})$ dir.

$A(\widehat{AFK})=A(\widehat{AKG})=A$ ve $A(\widehat{KHC})=A(\widehat{KCE})=B$ olsun. Buna göre,

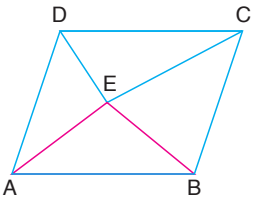
$A(\widehat{ACD})=A(\widehat{ABC}) \Rightarrow A+8+B=A+S+B$

$\Rightarrow S=8\ br^2$ bulunur.

*Bir paralelkenarın köşegeni üzerinde alınan herhangi bir noktadan geçen ve kenarlara çizilen paralel iki doğru parçasıyla oluşan iki paralelkenarın alanı eşittir.*



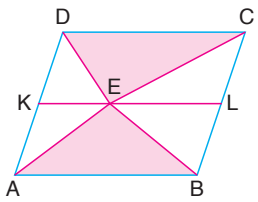
*Şekildeki gibi bir paralelkenarın iç bölgesinde alınan bir noktanın köşelerle birleştirilmesiyle elde edilen üçgenlerin alanları arasında,*




$$A(\widehat{EAD}) + A(\widehat{EBC}) = A(\widehat{EDC}) + A(\widehat{EAB}) = \frac{A(ABCD)}{2}$$

*şeklinde bir bağıntı vardır.*

**İspat**




[KL] // [AB] olacak şekilde [KL] nı çizelim. Buna göre KLCD paralelkenarının alanı, EDC üçgeninin alanının 2 katıdır. Benzer durum ABLK paralelkenarı ve ABE üçgeni için de geçerlidir. Buna göre,

$$A(\widehat{EDC}) = \frac{1}{2} A(KLCD)$$

$$+ \quad A(\widehat{EAB}) = \frac{1}{2} A(ABLK) \quad \textit{(Eşitlikleri taraf tarafa toplayalım.)}$$

$$A(\widehat{EDC}) + A(\widehat{EAB}) = \frac{1}{2} A(KLCD) + \frac{1}{2} A(ABLK)$$

$$= \frac{1}{2} [A(KLCD) + A(ABLK)]\text{'dir.}$$

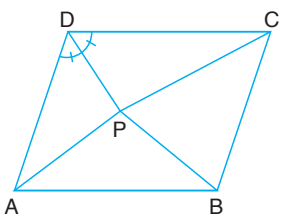
O hâlde $A(\widehat{EDC}) + A(\widehat{EAB}) = \frac{A(ABCD)}{2}$ bulunur.

Benzer şekilde $A(\widehat{EAD}) + A(\widehat{EBC}) = \frac{A(ABCD)}{2}$ olduğunu da siz gösteriniz.

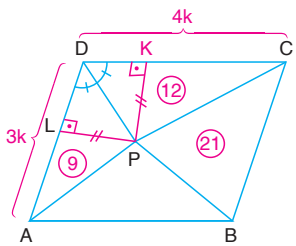
Sonuç olarak $A(\widehat{EAD}) + A(\widehat{EBC}) = A(\widehat{EDC}) + A(\widehat{EAB}) = \frac{A(ABCD)}{2}$'dir.

**25. Örnek**

**ABCD paralelkenar [DP] açıortay, $4|AD| = 3|DC|$, $A(\widehat{DAP}) = 9$ br$^2$ ve $A(\widehat{BPC}) = 21$ br$^2$ olduğuna göre APB üçgeninin alanını br$^2$ cinsinden bulalım.**




**Çözüm**




$4|AD| = 3|DC|$ olduğundan $|AD| = 3k$ alınırsa $|DC| = 4k$ olur.

[PK] ⊥ [DC] ve [PL] ⊥ [AD] çizelim. Açıortay üzerindeki bir noktadan açının kollarına çizilen dikmelerin uzunlukları eşit olduğundan, $|PL| = |PK|$ olur.

DAP ve DPC üçgenlerinin yükseklikleri eşit olduğundan alanları tabanları ile orantılı olacaktır. $\frac{A(\widehat{DAP})}{A(\widehat{DPC})}=\frac{|DA|}{|DC|}=\frac{3}{4}$ olur.

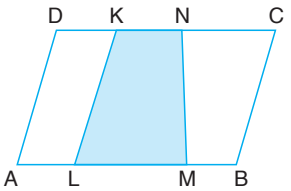
O hâlde $\frac{9}{A(\widehat{DPC})}=\frac{3}{4} \Rightarrow A(\widehat{DPC})=12\,br^2$ dir. Bu durumda,

$A(\widehat{DAP})+A(\widehat{BPC})=A(\widehat{DPC})+A(\widehat{APB}) \Rightarrow 9+21=12+A(\widehat{APB})$

$\Rightarrow A(\widehat{APB})=18\,br^2$ bulunur.

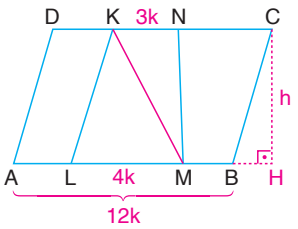
## 26. Örnek

ABCD paralelkenarında tabanları $4|KN|=|DC|$ ve $3|LM|=|AB|$ koşullarını sağlayan bir KLMN yamuğu oluşturulmuştur.




**Buna göre KLMN yamuğunun alanının, paralelkenarın alanına oranını bulalım.**

**Çözüm**




$|AB|=|DC|=12k$ alınırsa $4|KN|=|DC|$ olduğundan $|KN|=3k$, $3|LM|=|AB|$ olduğundan $|LM|=4k$ olur.

$[KM]$ nı ve $[CH]\perp[AB]$ olacak şekilde $[CH]$'nı çizelim. $|CH|=h$ olsun.

$A(KLMN)=A(\widehat{KMN})+A(\widehat{KLM})$

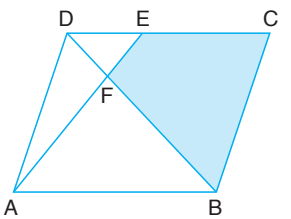
$=\frac{3k\cdot h}{2}+\frac{4k\cdot h}{2}=\frac{7kh}{2}$ olur.

$A(ABCD)=|AB|\cdot|CH|=12k\,.\,h$'dir.

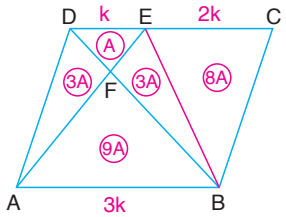
O hâlde $\frac{A(KLMN)}{A(ABCD)}=\frac{\frac{7kh}{2}}{12kh}=\frac{7}{24}$ bulunur.

## 27. Örnek

**ABCD paralelkenar, $[AE]\cap[BD]=\{F\}$ ve $3|DE|=|AB|$ olduğuna göre BCEF dörtgeninin alanının ABCD paralelkenarının alanına oranını bulalım.**



**Çözüm**




$3|DE| = |AB|$ olduğundan $|DE| = k$ alınırsa,

$|AB| = 3k$ ve $|EC| = 2k$ olur.

$\widehat{DEF} \sim \widehat{BAF}$ olduğundan,

$$\frac{A(\widehat{DEF})}{A(\widehat{BAF})} = \left(\frac{|DE|}{|AB|}\right)^2 = \left(\frac{k}{3k}\right)^2 = \frac{1}{9} \text{ dur.}$$

Bu durumda $A(\widehat{DEF}) = A \Rightarrow A(\widehat{BAF}) = 9A$ olur.

[BE] nı çizelim. ABED yamuğunda,

$\sqrt{A(\widehat{DEF}) \cdot A(\widehat{BAF})} = A(\widehat{DAF}) = A(\widehat{BEF})$ olduğundan,

$A(\widehat{DAF}) = A(\widehat{BEF}) = \sqrt{A \cdot 9A} = 3A$'dır.

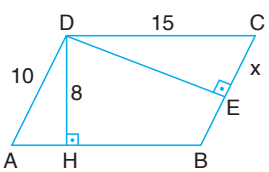
$A(\widehat{DAB}) = A(\widehat{BDC})$ olduğundan $12A = 4A + A(\widehat{EBC}) \Rightarrow A(\widehat{EBC}) = 8A$'dır.

O hâlde $\frac{A(BCEF)}{A(ABCD)} = \frac{11A}{24A} = \frac{11}{24}$ bulunur.

## 5.3.4 Öğrendiğimizi Uygulayalım

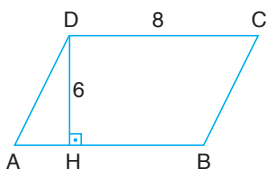
**1.** ABCD paralelkenar olmak üzere şekillerde verilenlere göre istenenleri br ya da $br^2$ cinsinden bulunuz.

**a.**




x = ?

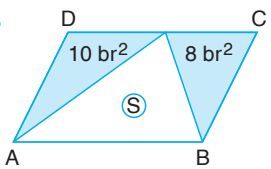
**b.**




A(ABCD) = ?

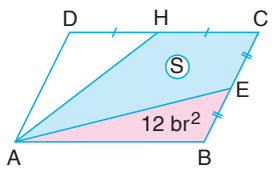
**2.** ABCD paralelkenar olmak üzere şekillerde verilenlere göre istenenleri $br^2$ cinsinden bulunuz.

**a.**




S = ?

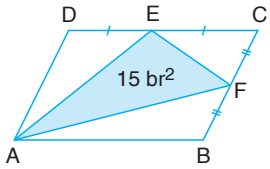
**b.**




S = ?

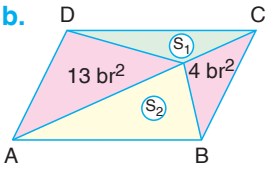
**3.** ABCD paralelkenar olmak üzere şekillerde verilenlere göre istenenleri $br^2$ cinsinden bulunuz.

**a.**




A(ABCD) = ?

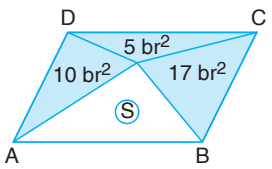
**b.**




[AC] köşegen ise $S_2 - S_1 = ?$

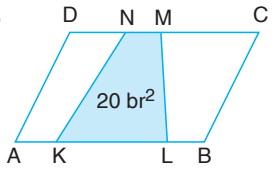
**4.** ABCD paralelkenar olmak üzere şekillerde verilenlere göre istenenleri $br^2$ cinsinden bulunuz.

**a.**




S = ?

**b.**



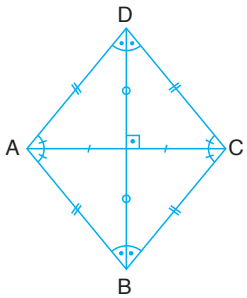

$6|MN| = |DC|$
$3|KL| = 2|AB|$
$\Rightarrow$ A(ABCD) = ?

## Eşkenar Dörtgen

Yunanca bir kelime olan hidrolik, su ve boru kelimelerinden türetilmiştir. Sıvıların mekanik özelliklerini inceleyen bir mühendislik dalı olan hidrolik, sıvı gücünün faydalı bir şekilde disipline edilmesini konu edinmiştir. Hidrolik sistemleri kullanan iş makinelerinden biri de yandaki fotoğrafta görülen dikey kaldırma sağlayan platformdur. Merdivenin sağladığı imkânlardan çok daha fazlasını sunan bu platformun kaldırma mekanizmasında dörtgen şeklinde makaslar kullanılmaktadır.

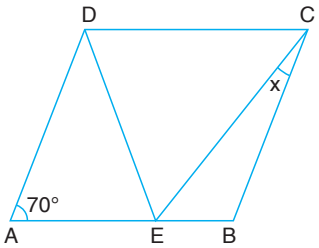
Sizce bu dörtgenleri oluşturan kollar farklı uzunlukta olsaydı iş makinesi amacına ulaşabilir miydi?

- *Kenar uzunlukları eşit olan paralelkenara eşkenar dörtgen denir.*
- *Eşkenar dörtgende köşegenler iç açıortay olup dik kesişirler.*
- *Her eşkenar dörtgen bir paralelkenardır. Buna göre paralelkenarın tüm özellikleri eşkenar dörtgen için de geçerlidir.*

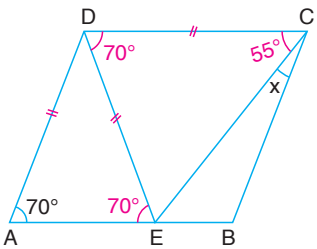



## 28. Örnek

**ABCD eşkenar dörtgen, $|DE| = |AB|$ ve $m(\widehat{DAB}) = 70°$ olduğuna göre $m(\widehat{BCE}) = x$'in kaç derece olduğunu bulalım.**




**Çözüm**




ABCD eşkenar dörtgen ve $|DE| = |AB|$ olduğundan $|DE| = |DC| = |DA|$'dır.

DAE ikizkenar üçgeninde,

$m(\widehat{DEA}) = m(\widehat{DAE}) = 70°$'dir.

$[DC] // [AB]$ olduğundan,

$m(\widehat{CDE}) = m(\widehat{DEA}) = 70°$ olur.

EDC ikizkenar üçgen ve $m(\widehat{EDC}) = 70°$ olduğundan,

$$m(\widehat{DCE}) = \frac{180° - 70°}{2} = 55°$$ dir.

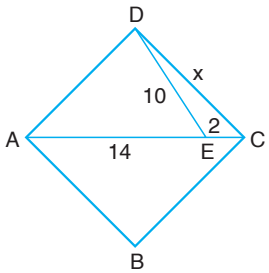
ABCD eşkenar dörtgen olduğundan,

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{C}) \Rightarrow 70° = 55° + x$

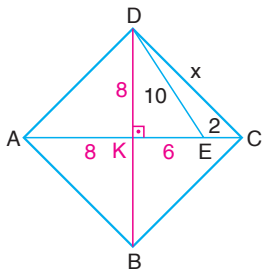
$\Rightarrow x = 15°$ bulunur.

## 29. Örnek

**ABCD eşkenar dörtgeninde [AC] köşegen, $|DE| = 10$ cm, $|AE| = 14$ cm ve $|EC| = 2$ cm olduğuna göre $|DC| = x$'in kaç cm olduğunu bulalım.**



**Çözüm**




[BD] köşegenini çizdiğimizde [AC] ⊥ [BD] olur.

$|AK| = |KC| = \frac{16}{2} = 8$ cm ve

$|KE| = 8 - 2 = 6$ cm'dir.

DKE dik üçgeninde,

$|DK|^2 = |DE|^2 - |KE|^2 \Rightarrow |DK|^2 = 10^2 - 6^2$

$\Rightarrow |DK| = 8$ cm bulunur.

DKC dik üçgeninde,

$|DC|^2 = |DK|^2 + |KC|^2 \Rightarrow x^2 = 8^2 + 8^2$

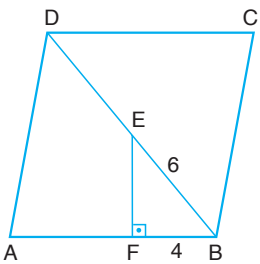
$\Rightarrow x = 8\sqrt{2}$ cm bulunur.

---

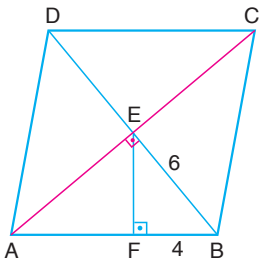
**30. Örnek**

ABCD eşkenar dörtgeninde E noktası köşegenlerin kesim noktasıdır.

**[EF] ⊥ [AB], |EB| = 6 br ve |FB| = 4 br olduğuna göre eşkenar dörtgenin çevre uzunluğunu birim cinsinden bulalım.**




**Çözüm**




E noktası köşegenlerin kesim noktası olduğundan $|DE| = |EB|$'dır.

[AC]'nı çizelim. Eşkenar dörtgende köşegenler dik kesiştiğinden [AC] ⊥ [DB] olur.

AEB dik üçgeninde Öklid teoremine göre,

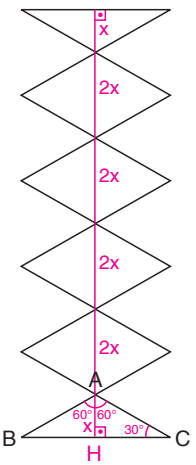
$|EB|^2 = |BF| \cdot |BA| \Rightarrow 6^2 = 4 \cdot |BA| \Rightarrow |BA| = 9$ br olur.

O hâlde Çevre(ABCD) $= 4 \cdot |AB| = 36$ br bulunur.

---

*Şekil 1*

*Şekil 2*




### 5.3.2 Kritik Düşünme

"Şekil 1"deki kaldırma platformunda makasları oluşturan kolların her biri birbirine eştir.

$m(\widehat{BAC}) = 120°$ olduğunda platform 6 metre yükselmektedir.

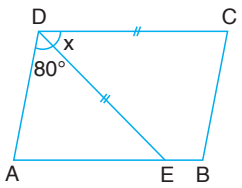
Buna göre $m(\widehat{BAC}) = 60°$ olduğunda platform kaç metre yükselir?

**İpucu:** "Şekil 2"yi kullanınız.

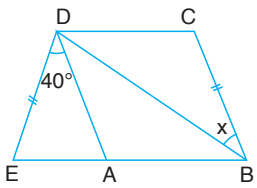
## 5.3.5 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** ABCD eşkenar dörtgen olmak üzere şekillerde verilenlere göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

**a.**

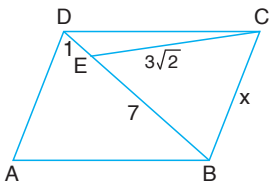



**b.**

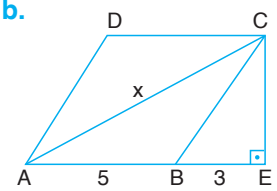



**2.** ABCD eşkenar dörtgen olmak üzere şekillerde verilenlere göre x'in kaç birim olduğunu bulunuz.

**a.**




**b.**

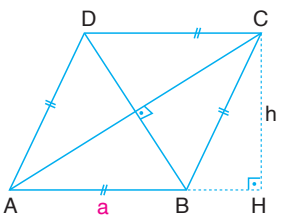



## Eşkenar Dörtgende Alan Bağıntıları

*ABCD eşkenar dörtgeninde;*

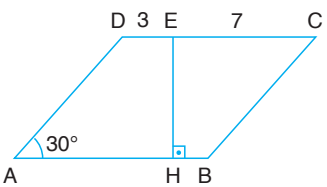
$$A(ABCD) = a \cdot h \quad \textit{veya}$$

$$A(ABCD) = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2} \textit{'dir.}$$

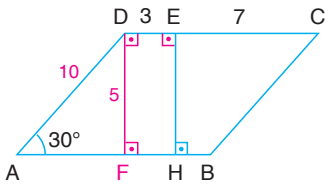



### 31. Örnek

**ABCD eşkenar dörtgen, $[EH] \perp [AB]$, $m(\widehat{DAB}) = 30°$, $|DE| = 3$ cm ve $|EC| = 7$ cm olduğuna göre $A(ABCD)$'nın kaç cm² olduğunu bulalım.**




**Çözüm**



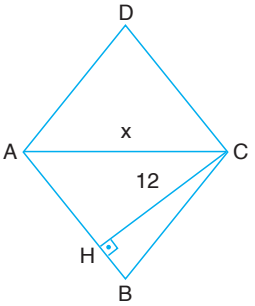

$[DF] \perp [AB]$ olacak şekilde $[DF]$'nı çizelim. Bu durumda,

$$|DF| = \frac{|AD|}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$ olur. *(30°–60°–90° üçgeni)*

O hâlde eşkenar dörtgenin alanı,

$$A(ABCD) = |DF| \cdot |DC| = 5 \cdot 10$$

$$= 50 \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$



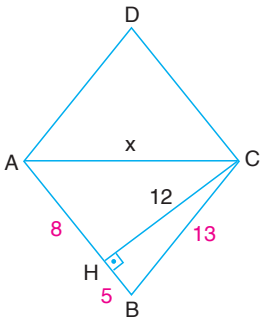

## 32. Örnek

**ABCD eşkenar dörtgen, $[CH] \perp [AB]$, $|CH| = 12$ br ve $A(ABCD) = 156$ br$^2$ olduğuna göre $|AC| = x$ uzunluğunun kaç birim olduğunu bulalım.**

### Çözüm

$A(ABCD) = |AB| \cdot |CH| \Rightarrow 156 = |AB| \cdot 12$

$\Rightarrow |AB| = 13$ br olur.




ABCD eşkenar dörtgen olduğundan,

$|AB| = |BC| = 13$ br'dir.

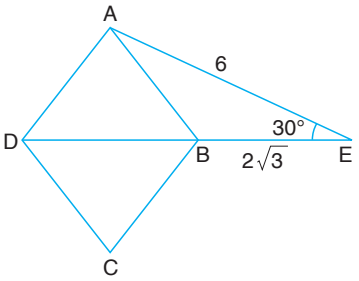
O hâlde CHB dik üçgeninde Pisagor teoremine göre,

$12^2 + |HB|^2 = 13^2 \Rightarrow |HB| = 5$ br ve

$|HB| = 5$ br $\Rightarrow |AH| = 13 - 5 = 8$ br olur.

CHA dik üçgeninde Pisagor teoremine göre,

$8^2 + 12^2 = |AC|^2 \Rightarrow x = 4\sqrt{13}$ br'dir.

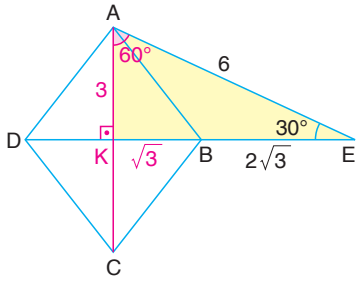



## 33. Örnek

**ABCD eşkenar dörtgen, $m(\widehat{AED}) = 30°$, $|AE| = 6$ cm ve $|BE| = 2\sqrt{3}$ cm olduğuna göre $A(ABCD)$'nın kaç cm$^2$ olduğunu bulalım.**

### Çözüm

ABCD eşkenar dörtgeninde [AC] köşegeni çizildiğinde AKE üçgeni $30° - 60° - 90°$ üçgeni olur.




Bu durumda,

$$|AK| = \frac{|AE|}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm ve}$$

$$|KE| = |AE| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm olur.}$$

O hâlde $|KB| = |KE| - |BE| = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$ cm,

$|DB| = 2 \cdot |KB| = 2\sqrt{3}$ cm ve $|AC| = 2 \cdot |AK| = 2 \cdot 3 = 6$ cm bulunur.

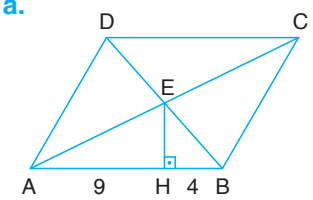
O hâlde eşkenar dörtgenin alanı,

$$A(ABCD) = \frac{|AC| \cdot |DB|}{2} = \frac{6 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2 \text{ bulunur.}$$

## 5.3.6 Öğrendiğimizi Uygulayalım

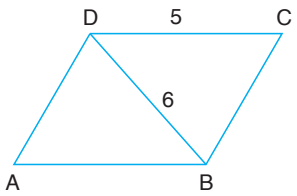
**1.** ABCD eşkenar dörtgen olmak üzere şekillerde verilenlere göre A(ABCD)'nın kaç br$^2$ olduğunu bulunuz.

**a.**



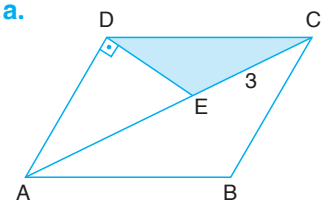

[EH] ⊥ [AB]

**b.**




**2.** ABCD eşkenar dörtgen olmak üzere şekillerde verilenlere göre A(ABCD)'nın kaç br$^2$ olduğunu bulunuz.

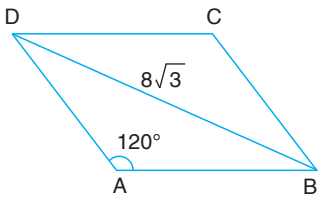
**a.**




$A(\overset{\frown}{DEC}) = 3$ br$^2$

[AD] ⊥ [DE]

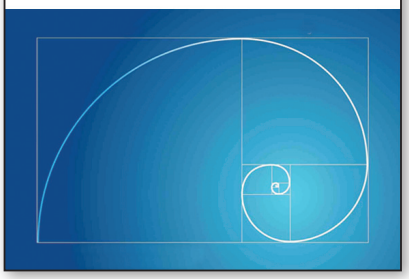
**b.**

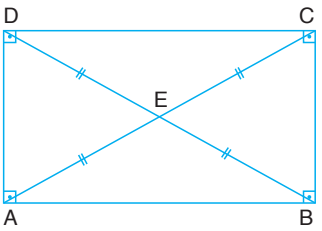



## Dikdörtgen

MÖ 480'de Perslilerin eski Athena *(Atena)* tapınağını yok etmesinden sonra yapılan Partenon *(Partenın)*, Antik Yunan'dan günümüze kalan yapılar arasında en iyi bilinenidir ve Yunan mimarisinin en büyük eseri olarak kabul edilir. Dikdörtgen bir taban üzerine inşa edilmiş olan Partenon'un ön cephesinde de göze hoş gelen dikdörtgenler kullanılmıştır. Dikdörtgenlerin göze hoş gelmelerinin sebebi kısa kenarının uzun kenarına oranının altın orana eşit olmasından kaynaklanmaktadır.

Partenon, Atina



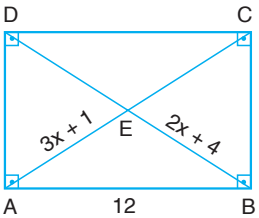



- *İç açılarının ölçüleri 90° olan paralelkenara dikdörtgen denir.*
- *Dikdörtgende köşegenlerin uzunlukları birbirine eşit olup köşegenler birbirini ortalar.*
- *Her dikdörtgen bir paralelkenar olduğundan dikdörtgen, paralelkenarın tüm özelliklerini taşır.*

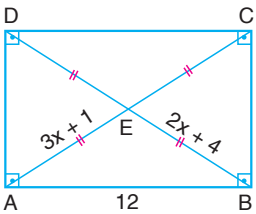
## 34. Örnek

ABCD dikdörtgeninde E noktası köşegenlerin kesim noktasıdır.

**|AE| = (3x + 1) cm, |BE| = (2x + 4) cm ve |AB| = 12 cm olduğuna göre |AD|'nun kaç santimetre olduğunu bulalım.**




### Çözüm




ABCD dikdörtgeninde $|DE| = |EB| = |AE| = |EC|$ olacağından,

$3x + 1 = 2x + 4 \Rightarrow x = 3$ cm'dir.

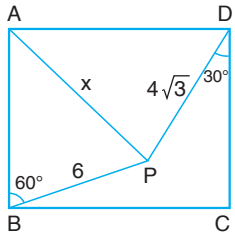
Bu durumda $|BD| = 2 \cdot |EB| = 2 \cdot (2 \cdot 3 + 4) = 20$ cm olur.

BAD dik üçgeninde Pisagor teoremine göre,

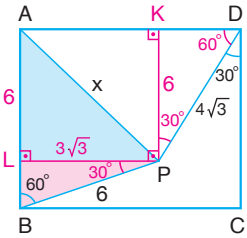
$|AD|^2 + |AB|^2 = |BD|^2 \Rightarrow |AD|^2 + 12^2 = 20^2 \Rightarrow |AD| = 16$ cm bulunur.

## 35. Örnek

**ABCD dikdörtgeninde $m(\widehat{PDC}) = 30°$, $m(\widehat{ABP}) = 60°$, $|PD| = 4\sqrt{3}$ cm ve $|BP| = 6$ cm olduğuna göre $|AP|$ = x'in kaç cm olduğunu bulalım.**




### Çözüm




[PK] ⊥ [AD] ve [PL] ⊥ [AB] olacak şekilde [PL] ve [PK] diklikleri çizilirse PBL üçgeninde,

$$|PL| = \frac{|PB|}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$= \frac{6}{2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \text{ cm} \quad (30°-60°-90° \text{ üçgeni}),$$

PKD üçgeninde,

$$|PK| = \frac{|PD|}{2} \cdot \sqrt{3}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = 6 \text{ cm} \quad (30°-60°-90° \text{ üçgeni}) \text{ olur.}$$

AKPL bir dikdörtgen olduğundan $|AL| = |KP| = 6$ cm'dir.

ALP dik üçgeninde Pisagor teoremine göre,

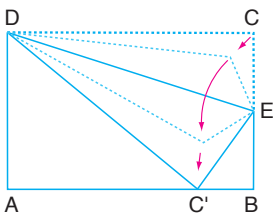
$|AL|^2 + |LP|^2 = |AP|^2 \Rightarrow 6^2 + (3\sqrt{3})^2 = x^2$

$\Rightarrow x = 3\sqrt{7}$ cm bulunur.

---

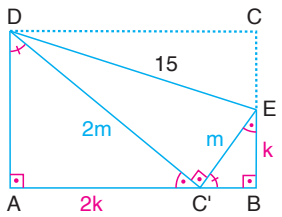
**36. Örnek** PROBLEM ÇÖZME

Köşeleri A, B, C ve D harfleri ile isimlendirilen dikdörtgen şeklindeki kâğıt, C noktası [AB] kenarı üzerindeki C' noktasına gelecek şekilde [ED] boyunca katlanıyor.




**$|AC'| = 2.|BE|$ ve $|ED| = 15$ cm olduğuna göre $|AB|$'nun kaç cm olduğunu bulalım.**

**Çözüm**




DCE üçgeni ile kâğıt katlanınca oluşan DC'E üçgeni eştir.

Bu yüzden DC'E açısı dik açıdır. Yanda DAC' ve C'BE üçgenlerinde eş olan açılar aynı işaretlerle gösterilmiştir.

O hâlde DAC' ve C'BE üçgenlerinin benzer olduğu görülür.

$|AC'| = 2 \cdot |BE|$ olduğundan $|AC'| = 2k$ alınırsa $|BE| = k$ olur.

Buna göre bu iki üçgen arasındaki benzerlik oranı 2'dir.

O hâlde $|DC'| = 2 \cdot |C'E| = 2m$ diyebiliriz. DC'E üçgeninde Pisagor teoreminden,

$|DE|^2 = |DC'|^2 + |C'E|^2 \Rightarrow 15^2 = (2m)^2 + m^2 \Rightarrow 5m^2 = 225$

$\Rightarrow m^2 = 45$

$\Rightarrow m = 3\sqrt{5}$ cm'dir.

DCE ve DC'E üçgenleri eş olduğundan,

$|DC| = |DC'| = 2m = 2 \cdot 3\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ cm'dir.

Dikdörtgende karşılıklı kenar uzunlukları eşit olduğundan,

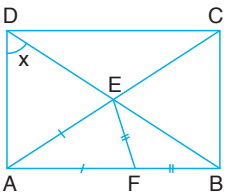
$|AB| = |DC| = 6\sqrt{5}$ cm bulunur.

---

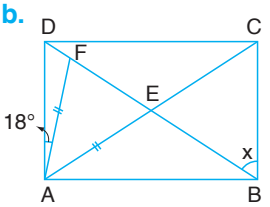
## 5.3.7 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** ABCD dikdörtgen olmak üzere şekillerde verilenlere göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

**a.**

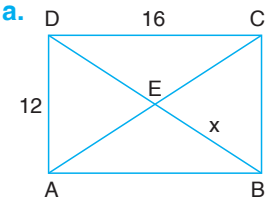



**b.**

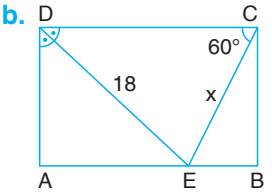



**2.** ABCD dikdörtgen olmak üzere şekillerde verilenlere göre x'in kaç birim olduğunu bulunuz.

**a.**

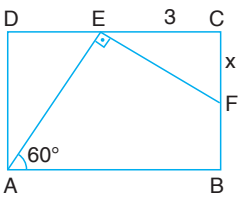



**b.**

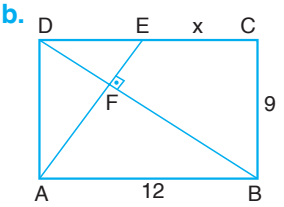



**3.** ABCD dikdörtgen olmak üzere şekillerde verilenlere göre x'in kaç birim olduğunu bulunuz.

**a.**

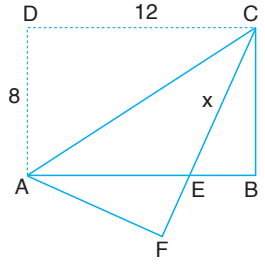



**b.**

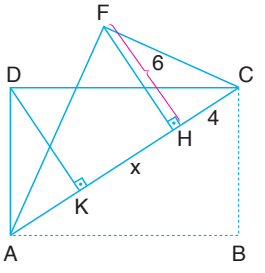



**4.** Aşağıdaki ABCD dikdörtgenleri [AC] köşegeni boyunca katlanarak AFC üçgenleri elde edilmiştir. Şekillerde verilenlere göre x'in kaç birim olduğunu bulunuz.

**a.**



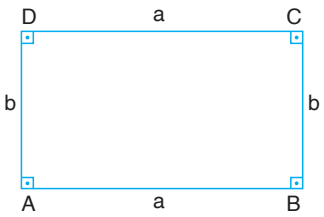

**b.**



## Dikdörtgende Alan Bağıntıları

*Dikdörtgenin alanı, dik kenarlarının uzunlukları çarpımına eşittir.*

$A(ABCD) = |AB| \cdot |AD| = a.b$'dir.

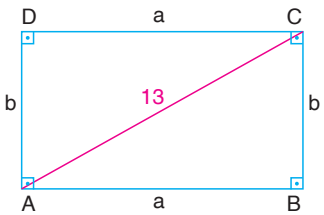



### 37. Örnek

**Köşegen uzunluğu 13 br ve çevre uzunluğu 34 br olan dikdörtgenin alanını $br^2$ cinsinden bulalım.**

#### Çözüm

$|AB| = a$ ve $|BC| = b$ olsun.




$Ç(ABCD) = 2(a + b) \Rightarrow 2(a + b) = 34$

$\Rightarrow a + b = 17$ br olur. **...(I)**

ABC üçgeninde Pisagor teoremine göre,

$a^2 + b^2 = 13^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 169$ bulunur. **...(II)**

Toplam durumundaki iki ifadenin tam kare açılımını yazalım. Açılımda **I** ve **II** eşitliklerini yerine yazalım.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow 17^2 = 169 + 2ab$

$\Rightarrow 2ab = 289 - 169$

$\Rightarrow a \cdot b = 60$'tır.

Dikdörtgenin alanı, kenar uzunluklarının çarpımı olduğundan,

$A(ABCD) = a \cdot b = 60\ br^2$ bulunur.

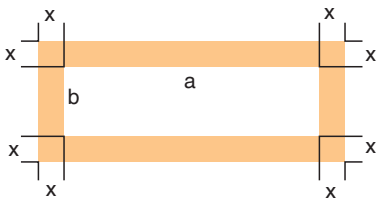
### 38. Örnek

Günlük Hayat Bağlantısı

Yanda dikdörtgen şeklinde bir çerçeve gösterilmiştir.



**Çerçevenin dış çevresi 200 cm ve iç çevresi 160 cm olduğuna göre çerçeve için kullanılan kalınlıkları eşit tahtaların yüzey alanını $cm^2$ cinsinden bulalım.**




**Çözüm**

Tahta kalınlığını x, iç dikdörtgenin kenar uzunluklarını da a ve b olarak alalım. Buna göre iç ve dış çevrelerin uzunluklarını sırasıyla,

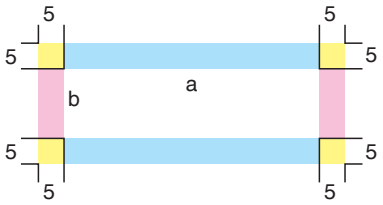
$2(a+b) = 160$ cm **... (I)** ve

$2[(a+2x)+(b+2x)] = 200$ cm **... (II)** şeklinde ifade edebiliriz. **II.** denklemi düzenleyelim:

$2[a+b+4x] = 200 \Rightarrow 2(a+b)+8x = 200$

$\Rightarrow 160 + 8x = 200$

$\Rightarrow x = 5$ cm bulunur.




Yanda mavi ve pembe renkle gösterilen dikdörtgenlerin alanları sırasıyla $2\cdot(5\cdot a) = 10a$ ve $2\cdot(5\cdot b) = 10b$'dir.

Sarı renkle gösterilen karelerin alanları da $4.(5.5) = 100$ cm$^2$ olduğundan toplam alan,

$10a + 10b + 100 = 10(a+b) + 100$

$= 10\cdot 80 + 100$

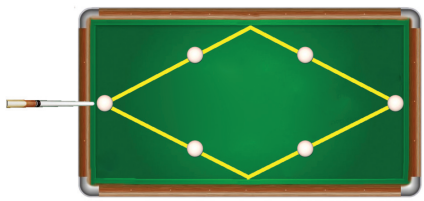
$= 900$ cm$^2$ dir.

*Spor, insani değerlerin yüceltildiği belirli ölçüde güç ve beceri gerektiren ve evrensel kuralları olan yarışmalı ve eğlenceli etkinliktir. Spor ahlaki; sosyal, politik ve ekonomik ilişkilerin bütünü olup toplumsal değerlerin göstergesidir. Sporcunun rakibine ve kendisine olan saygısının ifadesidir. Sportmenlik sağlığa, birlik ve beraberliğe, kardeşliğe, dostluğa dayanan insani değerlerdir.*

*Ülkemizde amatör spor branşlarda bireysel ve takım sporlarında düzenlenen Türkiye şampiyonalarında sporcular ülkemizi temsil etme hakkı kazanır ve katıldığı branş ile ilgili Dünya, Avrupa, Balkan Şampiyonası gibi faaliyetlere katılıp ülkemizi temsil eder ve Millî Sporcu ünvanını almaya hak kazanır. Millî sporcu, ülkeyi temsil ettiğinden kendisine, ailesine, çevresine ve vatanına karşı mukaddes bir sorumluluk taşır.*

### 5.3.3 Kritik Düşünme

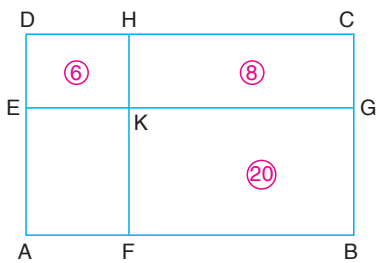
Son yıllarda spor dalları içinde önemli bir yer kaplamaya başlayan bilardo şu anda, Avrupa'nın en çok ilgilenilen beş sporu arasında yer almaktadır. Görseldeki bilardo masasında bulunan topa vurulduğunda kenarların orta noktalarına değen topun izlediği yol gösterilmiştir.



Topun izlediği yol 6,8 m ve dikdörtgen şeklindeki bilardo masasının kısa kenarının uzunluğu 160 cm olduğuna göre masanın alanı kaç metrekaredir?

### 39. Örnek

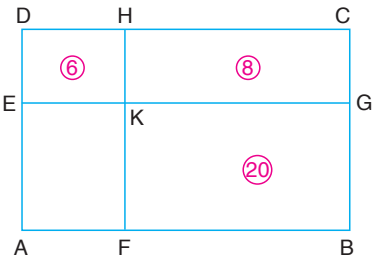
ABCD dikdörtgeninin kenarlarına paralel olacak şekilde [FH] ve [EG] çizilerek dört dikdörtgen oluşturulmuştur.




**Dikdörtgenlerin içinde yazan sayılar bu dikdörtgenlerin alanlarını belirttiğine göre A(AFKE)'nı br$^2$ cinsinden bulalım.**

**Çözüm**

EKDH ve KGCH dikdörtgenlerinin birer kenar uzunlukları eşit olduğundan alanları oranı $|EK|$ ve $|KG|$ ile orantılıdır.




$$\frac{|EK|}{|KG|} = \frac{6}{8} \ldots (\mathbf{I}) \text{ olur.}$$

Benzer şekilde AFKE ve FBGK dikdörtgenlerinin alanları da $|EK|$ ve $|KG|$ ile orantılıdır.

$$\frac{|EF|}{|KG|} = \frac{A(AFKE)}{20} \ldots (\mathbf{II}) \text{ olur.}$$

**I** ve **II**'den,

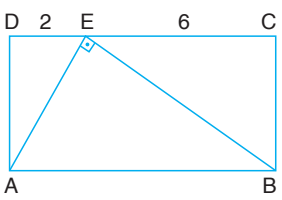
$$\frac{6}{8} = \frac{A(AFKE)}{20} \Rightarrow A(AFKE) = 15 \text{ br}^2 \text{ bulunur.}$$

## 5.3.8 Öğrendiğimizi Uygulayalım

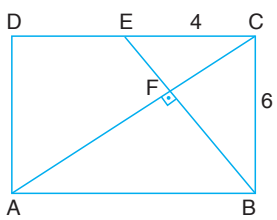
**1.** Uzun kenarının uzunluğu kısa kenarının uzunluğu 2 katı olan bir dikdörtgenin köşegen uzunluğu $3\sqrt{5}$ br olduğuna göre bu dikdörtgenin alanı kaç $\text{br}^2$ dir?

**2.** ABCD dikdörtgen olmak üzere şekillerde verilenlere göre $A(ABCD)$'nı $\text{br}^2$ cinsinden bulunuz.

**a.**

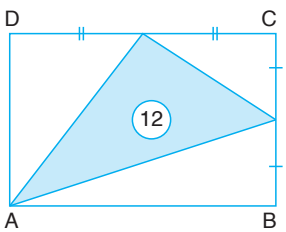



**b.**

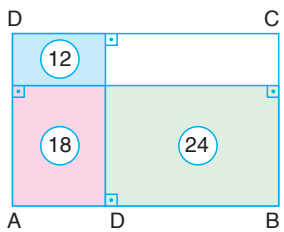



**3.** ABCD dikdörtgen olmak üzere boyalı bölgelerin alanı şekillerde verilmiştir. Buna göre $A(ABCD)$'nı $\text{br}^2$ cinsinden bulunuz.

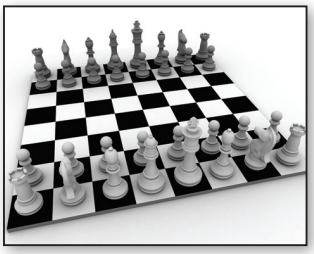
**a.**




**b.**



**Bunları Biliyor musunuz?**



Satrancın, zamanımızdan en az 4000 yıl önce Mısır'da oynandığına dair bulgulara piramitlerdeki kabartmalarda rastlanmaktadır. Ortaya çıkışına dair efsanelerden biri "buğday" tanesi efsanesi'dir. Bu efsaneye göre satrancın ilgisini çekmesiyle birlikte hükümdar icadı yapan kişiye "dile benden ne dilersen" der. Bunun üzerine mucit "Satranç tahtasının karelerini buğday ile doldurun, ancak bir şartım var. Birinci kareye bir, ikinci kareye iki, üçüncü kareye dört, dördüncü kareye sekiz, beşinci kareye on altı... ta ki 64 kare bitinceye kadar bir öncekinin iki katı buğday konulsun!" der. Hükümdar, bu kadar basit görünen arzunun derhâl yerine getirilmesini emreder. Hemen bir tabak buğday getiren vezirler daha 13. karede iken 4096 buğday tanesi gerektiğini görünce, bu isteğin hiç de sandıkları kadar basit bir istek olmadığını anlamışlardır. Vezirler hesap yapınca görürler ki; değil ülkenin, bütün dünyanın buğdayları bile akıllı mucidin isteğini karşılayamaz çokluktadır. Böyle akıllıca bir istek o zamana kadar ne görülmüş ne de işitilmiştir. Bu yüzden hükümdar mucidi çok takdir etmiş ve bulduğu oyunu destekleyerek yayılmasına yardımcı olmuştur.

*Genel ağdan alınmıştır.*

## Kare

Günlük Hayat Bağlantısı

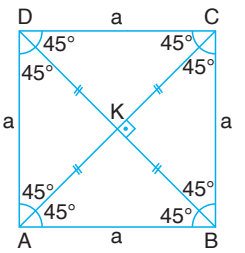
Tangram; taş, kemik, plastik veya tahtadan yapılmış yedi adet geometrik şeklin tamamının bir araya getirilerek yeni şekiller elde edilmesine dayalı bir zeka oyunudur.

Kullanılan parçalar yanda da görüldüğü gibi kare, paralelkenar ve farklı büyüklükte beş adet üçgendir.

Tangram kullanılarak geometrik şekiller, insan veya hayvan figürleri ya da benzeri şekiller elde edilir.

Fotoğraftaki tangram parçalarını inceleyiniz. Karenin köşegeni ile ilgili özellikleri tangramı kullanarak açıklayınız.

- *Kenar uzunlukları birbirine eşit olan dikdörtgene kare adı verilir. Buna göre her kare aynı zamanda bir dikdörtgendir.*
- *Karede eşit uzunlukta olan ve birbirini dik ortalayan köşegenler aynı zamanda ait oldukları açıların iç açıortaylarıdır.*



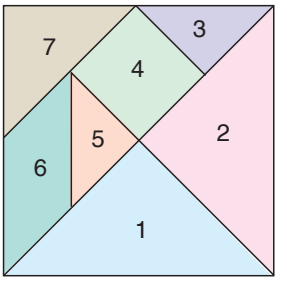

### 40. Örnek

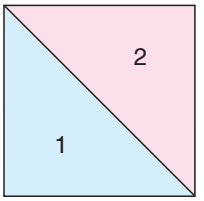
**Tangram parçalarının tamamını kullanarak birbirine eş iki kare oluşturalım.**

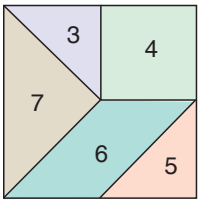
**Çözüm**

Önce tangram parçalarını Yandaki gibi numaralandıralım.

Parçaları aşağıdaki gibi birleştirirsek birbirine eş iki kare elde ederiz.

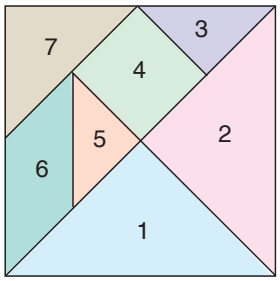


### 5.3.4 Kritik Düşünme

Aşağıdaki şekiller, yanda numaralandırılmış tangram parçalarının hangi kombinasyonu ile oluşturulabilir, bulunuz.



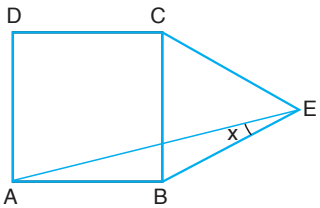

**a.**

**b.**

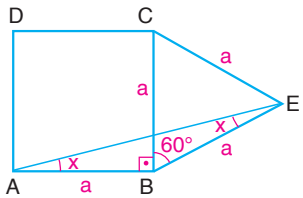
**c.**

**41. Örnek**

**Yandaki şekilde ABCD kare ve CBE eşkenar üçgen olduğuna göre $m(\widehat{AEB}) = x$'in kaç derece olduğunu bulalım.**




**Çözüm**




Karenin bir kenar uzunluğu a olsun.

$\widehat{BEC}$ eşkenar üçgen olduğundan

$|BC| = |BE| = |CE| = a$ olur.

$|AB| = |BE| = a$ olduğundan $\widehat{ABE}$ ikizkenar üçgendir.

Yani $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{BEA}) = x$'tir.

$m(\widehat{ABC}) = 90°$ ve $m(\widehat{CBE}) = 60°$ olduğundan $m(\widehat{ABE}) = 90° + 60° = 150°$ olur.

ABE ikizkenar üçgeninde,

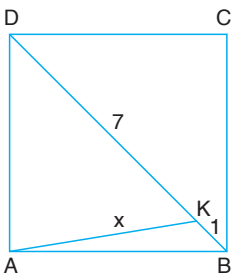
$m(\widehat{EAB}) + m(\widehat{ABE}) + m(\widehat{BEA}) = 180° \Rightarrow x + 150° + x = 180°$

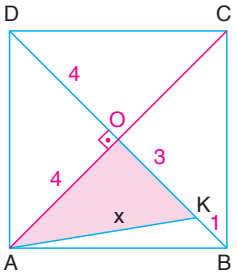
$\Rightarrow 2x = 30°$

$\Rightarrow x = 15°$ bulunur.

**42. Örnek**

**ABCD bir kare, [BD] köşegen, $|BK| = 1$ cm, $|DK| = 7$ cm olduğuna göre $|KA| = x$'in kaç cm olduğunu bulalım.**






**Çözüm**

[AC] köşegenini çizelim.

$|DB| = |DK| + |KB| = 7 + 1 = 8$ cm'dir. Karede köşegenler birbirini dik ortaladığından,

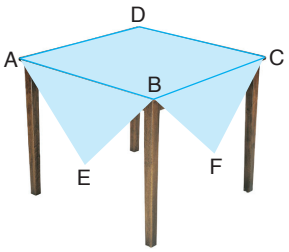
$|AO| = |OC| = |OB| = |OD| = 4$ cm'dir.

$|KB| = 1$ cm olduğundan $|OK| = 3$ cm olur.

AOK dik üçgeninde Pisagor teoremine göre,

$x^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow x^2 = 16 + 9 = 25$

$\Rightarrow x = 5$ cm bulunur.

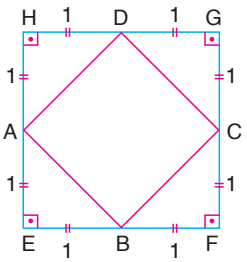



**43. Örnek** PROBLEM ÇÖZME

Yanda üst yüzeyi kare olan bir masa ve üzerine örtülmüş kare şeklinde masa örtüsü gösterilmiştir. Masanın üst yüzeyinden sarkan masa örtüsü parçalarının her biri birbirine eş üçgenlerdir.

**Masa örtüsünün çevre uzunluğu 8 m olduğuna göre masanın kenar uzunluğunu m cinsinden bulalım.**

**Çözüm**



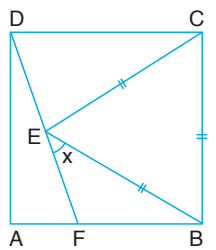

Masa örtüsü düz bir zemin üzerine açıldığında masanın üst yüzeyi yandaki gibi olur. Masa örtüsünün aşağıya sarkan parçaları eş üçgenler olduğundan bu üçgenlerin dik kenar uzunlukları 1 m olur. Buna göre masanın bir kenar uzunluğu AEB dik üçgeninde Pisagor teoremi kullanılarak,

$|AB|^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow |AB| = \sqrt{2}$ m bulunur.

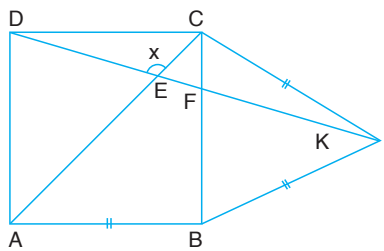
## 5.3.9 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** ABCD kare olmak üzere şekillerde verilenlere göre x'in kaç derece olduğunu bulunuz.

**a.**

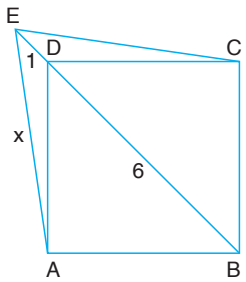



**b.**

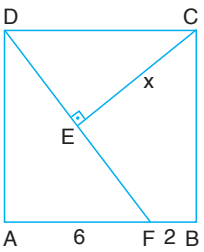


**2.** ABCD kare olmak üzere şekillerde verilenlere göre x'in kaç birim olduğunu bulunuz.

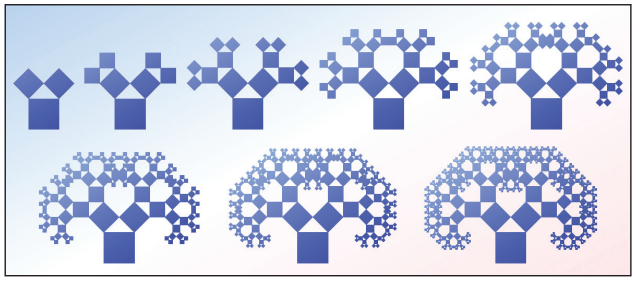
**a.**




**b.**




**Bunları Biliyor musunuz?**

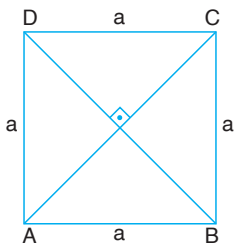


Fraktal, Latincede parçalanmış anlamına gelen fractuuss (fraktus) kelimesinden gelmektedir. Fraktalın günümüzdeki tanımı ise bir şeklin belli oranda büyüyen ya da küçülen parçalarıyla oluşturulan sonsuz defa kendini tekrar eden şekil örüntüsüdür. Günlük hayatta karşımıza çıkan fraktallara eğrelti otu, kar tanesi, brokoli bitkisi vb. örnekler verilebilir. Matematikte ise ünlü fraktallardan biri de yanda gösterilen Pisagor Ağacı fraktalıdır. Fraktal oluşturulurken başlangıç karesine her adımda o kare ile $\sqrt{2}/2$ benzerlik oranına sahip iki eş kare, kenarları bir dik üçgenin kenarları olacak şekilde yerleştirilir. Bu adım bir çok kez tekrarlandığında oluşan şekil bir ağaç görüntüsü alacağından ve her bir adımda kullanılan karelerin kenar uzunlukları arasında Pisagor teoremi sağlandığından fraktala Pisagor Ağacı adı verilmiştir.

## Karede Alan Bağıntıları

*Bir kenarının uzunluğu a br olan ABCD karesinin alanı,*

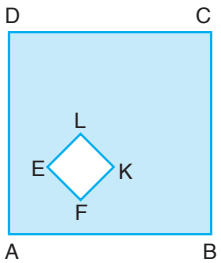
- $A(ABCD) = |AB|^2 = a^2$ *ya da*
- $A(ABCD) = \dfrac{|AC| \cdot |BD|}{2} = \dfrac{|AC|^2}{2}$ $(|AC| = |BD|)$ *bağıntılarıyla bulunur.*




### 44. Örnek

ABCD ve EFKL birer karedir.

**$A(ABCD) = 4 \cdot A(EFKL)$ ve $|AB| + |KF| = 9$ cm olduğuna göre mavi boyalı bölgenin alanının kaç $cm^2$ olduğunu bulalım.**



**Çözüm**

$|AB| = a$, $|KF| = b$ olsun.

$A(ABCD) = 4 \cdot A(EFKL)$ ise $a^2 = 4 \cdot b^2 \Rightarrow a = 2b$ olur.

$|AB| + |KF| = 9 \Rightarrow a + b = 9 \Rightarrow 2b + b = 9$

$\Rightarrow b = 3$ cm'dir.

$a = 2b \Rightarrow a = 2 \cdot 3 = 6$ cm'dir.

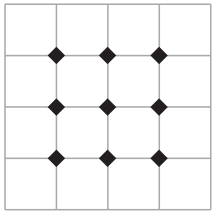
Buna göre mavi boyalı bölgenin alanı,

$A(ABCD) - A(EFKL) = a^2 - b^2 = 6^2 - 3^2$

$= 27 \text{ cm}^2$ bulunur.

---

**45. Örnek**



Yanda kare şeklinde bir zeminin fayans kaplaması gösterilmiştir.

**Beyaz bölgenin alanı 6112 $\text{cm}^2$ ve siyah kare fayanslardan biri ile zemin arasındaki benzerlik oranı $\frac{\sqrt{2}}{20}$ olduğuna göre siyah kare fayanslardan birinin köşegen uzunluğunu cm cinsinden bulalım.**

**Çözüm**

Benzer iki çokgenin alanları arasındaki oran benzerlik oranının karesine eşittir. Buna göre bir siyah kare fayansın alanının tüm zemininin alanına oranı $\left(\frac{\sqrt{2}}{20}\right)^2 = \frac{1}{200}$'dür.

O hâlde tüm zeminin alanı $200A$ ise bir siyah kare fayansın alanı $A$'dır. Bu durumda beyaz bölgenin alanı, $200A - 9A = 191A$ olur.

Buna göre $191A = 6112 \Rightarrow A = 32 \text{ cm}^2$ dir.

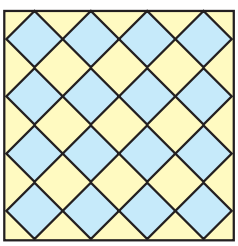
O hâlde siyah kare fayansın köşegen uzunluğu $(x)$,

$\frac{x^2}{2} = 32 \Rightarrow x^2 = 64$

$\Rightarrow x = 8$ cm bulunur.

---

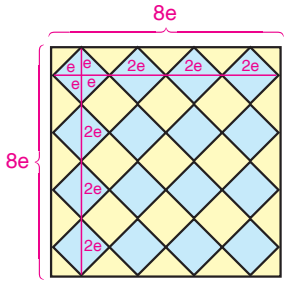
**46. Örnek** PROBLEM ÇÖZME



Kare şeklindeki masa örtüsünün içinde bulunan mavi renkli kareler birbirleri ve masa örtüsünü çevreleyen karenin kenarları ile şekildeki gibi birer noktada kesişmektedir.

**Sarı renkli bölgelerin toplam alanı 2,88 $\text{m}^2$ olduğuna göre mavi renkli karelerden birinin çevre uzunluğunu m cinsinden bulalım.**

**Çözüm**




Mavi renkli karelerden birinin köşegen uzunluğuna 2e diyelim. Bu durumda karelerin değme noktalarından çizilen yatay ve düşey doğrular masa örtüsünün kenarı ile eş olacaktır. Buna göre masa örtüsünün kenar uzunluğu e türünden 8e, alanı da $64e^2$ dir.

Mavi renkli karelerden birinin alanı, $\frac{(2e)^2}{2} = 2e^2$ olur.

Sarı renkli bölgenin alanı, masa örtüsünün alanından mavi renkli 16 karenin alanları toplamı çıkarılarak bulunabilir.

Buna göre sarı renkli bölgenin alanı $2{,}88\ m^2$ olduğundan,

$2{,}88 = 64e^2 - 16 \cdot (2e^2) \Rightarrow 2{,}88 = 32e^2$

$\Rightarrow e^2 = 0{,}09$

$\Rightarrow e = 0{,}3$ metredir.

Karede köşegen uzunluğu kenar uzunluğunun $\sqrt{2}$ katı olduğundan küçük karelerden birinin bir kenar uzunluğu,

$a \cdot \sqrt{2} = 0{,}6 \Rightarrow a = \frac{0{,}6}{\sqrt{2}} = \frac{6}{10\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{20}$ metredir.

O hâlde bir mavi karenin çevresi, $4 \cdot \frac{6\sqrt{2}}{20} = \frac{6\sqrt{2}}{5}$ m bulunur.

## 47. Örnek

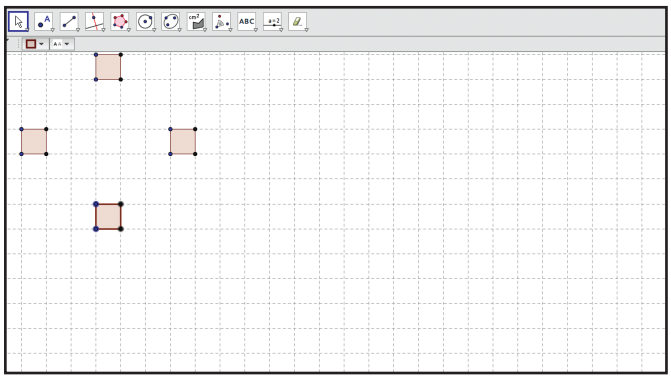
Yandaki görselde geleneksel mimaride kullanılan bir motif örneği verilmiştir.

**İçinde kare ve sekizgenlerin bulunduğu bu çalışmayı dinamik geometri yazılımında oluşturup içindeki motiflerin alanlarını $br^2$ cinsinden bulalım.**

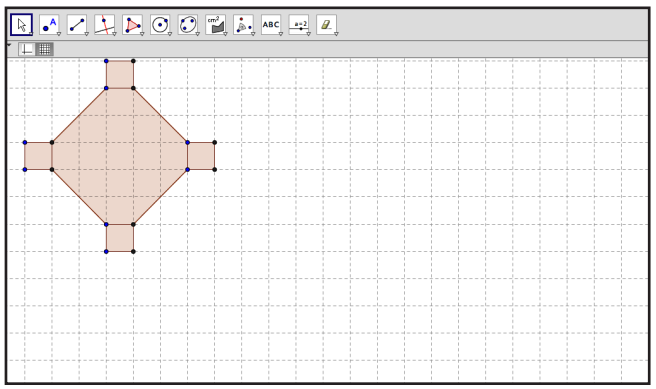
**Çözüm**

Dinamik geometri yazılımında boş bir çalışma sayfası açalım. "Düzgün Çokgen" butonuna basarak bir kare oluşturalım. Oluşturduğumuz kareyi Ctrl + A komutuyla seçip, Ctrl + C komutuyla kopyalayıp, Ctrl + V komutuyla yapıştırarak "Şekil 1"deki şekli oluşturalım.

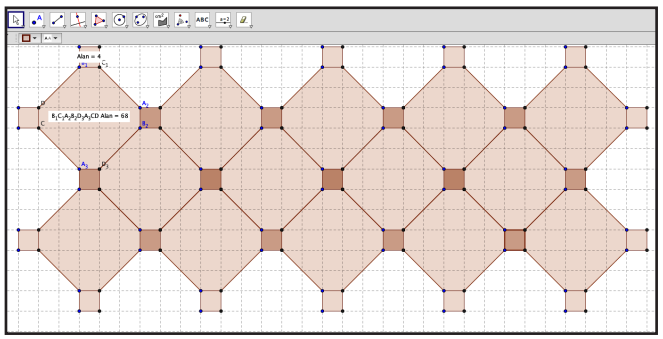
*Şekil 1*



**Şekil 2**



**Şekil 3**



"Çokgen" butonuna basıp köşe noktalarını seçerek "Şekil 2"deki sekizgeni oluşturalım. Oluşturduğumuz sekizgen ve dört kareyi Ctrl + A komutuyla seçip, Ctrl + C komutuyla koplayayıp, Ctrl + V komutuyla yapıştırarak "Şekil 3"teki görüntüyü elde edelim.

"Açı" butonunun altında açılan "Alan" kısmına tıklayıp oluşturduğumuz taslak çalışmadaki kare ve sekizgenin alanını "Şekil 3"teki gibi buluruz.

Taslak çalışma 27 kare ve 14 sekizgenden oluştuğundan tüm alan,

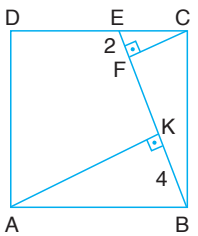
$27 \cdot 4 + 14 \cdot 68 = 108 + 952$

$= 1060 \text{ br}^2$ dir.

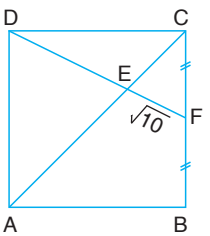
## 5.3.10 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** ABCD kare olmak üzere şekillerde verilenlere göre A(ABCD)'nın kaç $\text{br}^2$ olduğunu bulunuz.

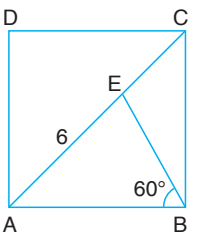
**a.**




**b.**

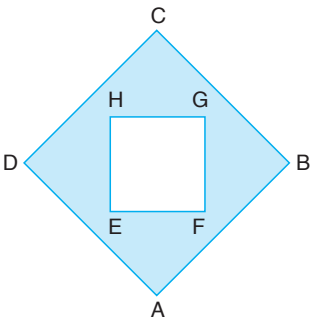



**c.**




**2.** ABCD ve EFGH kare olmak üzere şekillerde verilenlere göre A(EFGH)'nın kaç $\text{br}^2$ olduğunu bulunuz.

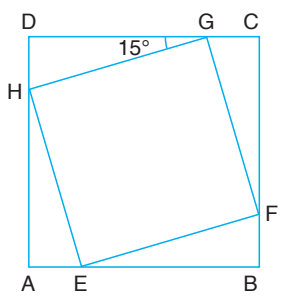
**a.**




$|AB| - |EF| = 3$ br

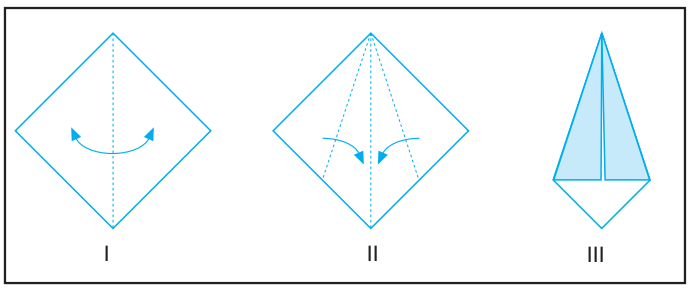
Boyalı alan 33 $\text{br}^2$

**b.**




$A(ABCD) = 24 \text{ br}^2$

## Deltoid

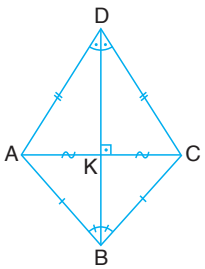



Origami, Japonca "ori" *(katlamak)* ve "gami" *(kâğıt)* sözcüklerinin birleşiminden meydana gelmiş olup kâğıt katlama sanatına verilen addır. Genellikle kare kâğıt parçalarının kullanıldığı origamide, kâğıdı kesmeden ve yapıştırıcı kullanmadan, sadece katlayarak figürler oluşturmak esastır. Origamide birçok kâğıt katlama yönteminin temelinde deltoid kâğıt katlama tekniği yer almaktadır. Yukarıda bu katlama tekniği gösterilmiştir.

*Köşegenlerinden biri, iki ikizkenar üçgenin tabanı olan dörtgene deltoid adı verilir.*

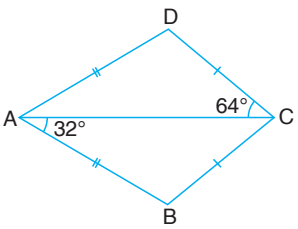
*Yandaki ABCD deltoidinde;*

- $|AB| = |BC|$ *ve* $|AD| = |DC|$, $[BD] \perp [AC]$, $|AK| = |KC|$*'dir.*
- $[BD]$ *köşegeni* $B$ *ve* $D$ *açılarının açıortayıdır.*

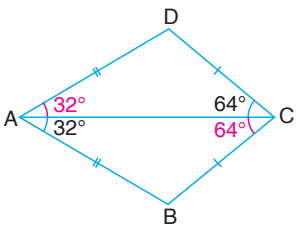



### 48. Örnek

**ABCD deltoid, $|AD| = |AB|$, $|BC| = |CD|$, $m(\widehat{ACD}) = 64°$ ve $m(\widehat{CAB}) = 32°$ olduğuna göre $m(\widehat{ABC})$'nün kaç derece olduğunu bulalım.**




**Çözüm**




$[AC]$ köşegeni açıortay olacağından,

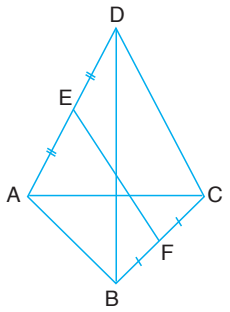
$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{CAB}) = 32°$ ve

$m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{BCA}) = 64°$ dir.

ABC üçgeninde,

$m(\widehat{CAB}) + m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BCA}) = 180° \Rightarrow 32° + m(\widehat{ABC}) + 64° = 180°$

$\Rightarrow m(\widehat{ABC}) = 84°$ bulunur.

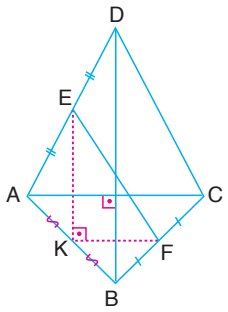



## 49. Örnek

**ABCD deltoidinde $|AD| = |DC|$, $|AB| = |BC|$, E ve F orta noktalar, $|DB| = 8$ cm ve $|AC| = 6$ cm olduğuna göre $|EF|$'nun kaç cm olduğunu bulalım.**

### Çözüm

ABCD deltoidinde köşegenler dik kesiştiğinden, $[DB] \perp [AC]$'dir.




$[AB]$ nın orta noktası K olsun. ABD üçgeninde $[EK]$ orta taban olduğundan,

$$|EK| = \frac{|DB|}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ cm}$$ bulunur.

ABC üçgeninde $[KF]$ orta taban olduğundan,

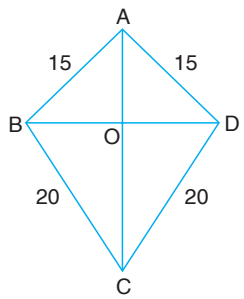
$$|KF| = \frac{|AC|}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$$ bulunur.

Ayrıca $[EK] // [DB]$ ve $[KF] // [AC]$ olduğundan $[EK] \perp [KF]$'dir.

EKF dik üçgeninde Pisagor teoremine göre,

$|EF|^2 = |EK|^2 + |KF|^2 \Rightarrow |EF|^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow |EF|^2 = 25$

$\Rightarrow |EF| = 5$ cm bulunur.



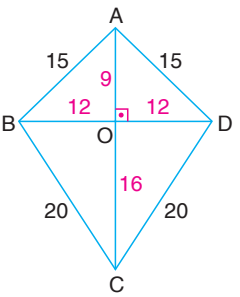

## 50. Örnek

**ABCD deltoidinde $|AB| = |AD| = 15$ br, $|BC| = |CD| = 20$ br ve $|BD| = 24$ br olduğuna göre $|AC|$'nun kaç br olduğunu bulalım.**

### Çözüm

ABCD deltoidinde $[AC] \perp [BD]$ ve

$$|BO| = |OD| = \frac{|BD|}{2} = 12 \text{ br}$$'dir.




AOD üçgeninde Pisagor teoremine göre,

$|AO|^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow |AO| = 9$ br olur.

DOC üçgeninde Pisagor teoremine göre,

$12^2 + |OC|^2 = 20^2 \Rightarrow |OC| = 16$ br olur.

O hâlde $|AC| = |AO| + |OC| = 9 + 16 = 25$ br bulunur.

## 5.3.11 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına (D), yanlış olanların başına (Y) yazınız.

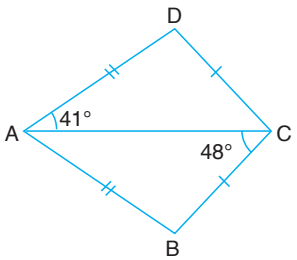
**a.** ☐ Deltoid eşkenar dörtgenin tüm özelliklerini sağlar.

**b.** ☐ Deltoidde köşegenler birbirini dik ortalar.

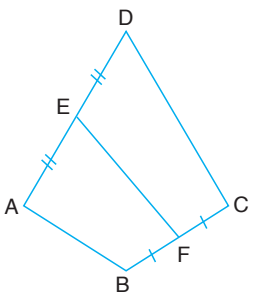
**c.** ☐ Deltoidin karşılıklı iç açılarının ölçüleri birbirine eşittir.

**ç.** ☐ Kare deltoidin tüm özelliklerini sağlar.

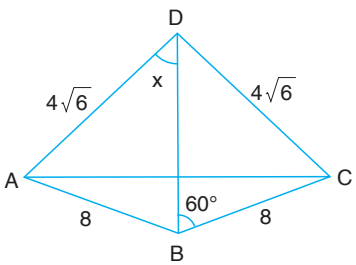
**2.** ABCD deltoidinde $|AD| = |AB|$, $|DC| = |CB|$, $m(\widehat{DAC}) = 41°$ ve $m(\widehat{ACB}) = 48°$ olduğuna göre $m(\widehat{D})$ kaç derecedir?



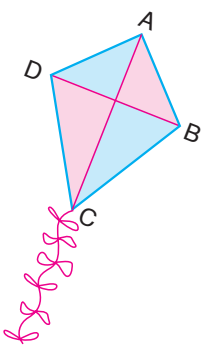

**3.** ABCD deltoidinde E ve F bulundukları kenarların orta noktaları, $|AD| = |DC|$, $|AB| = |BC|$, deltoidin köşegen uzunlukları 10 cm ve 12 cm olduğuna göre $|EF|$ kaç cm'dir?



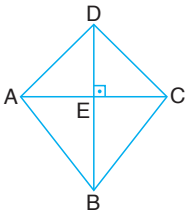

**4.** ABCD deltoidinde $|AD| = |DC| = 4\sqrt{6}$ br, $|AB| = |BC| = 8$ br ve $m(\widehat{DBC}) = 60°$ olduğuna göre $m(\widehat{ADB}) = x$ kaç derecedir?




**5.** Deltoid şeklinde yapılmış yandaki uçurtma modelinde $m(\widehat{DAB}) = 100°$, $m(\widehat{DCB}) = 20°$, $|AB| = |AD| = 60$ cm ve $|DC| = |CB| = 100$ cm olduğuna göre uçurtma iskeletinde bulunan [AC] çıtasının uzunluğu kaç cm'dir?

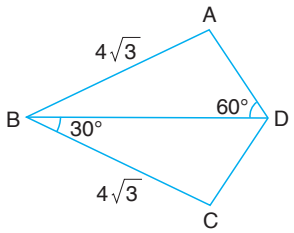


## Deltoidde Alan Bağıntıları




*Deltoidin alanı köşegenlerinin uzunlukları çarpımının yarısına eşittir.*

$$A(ABCD) = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2}$$




### 51. Örnek

**ABCD deltoid, $|AB| = |BC| = 4\sqrt{3}$ br, $m(\widehat{ADB}) = 60°$ ve $m(\widehat{DBC}) = 30°$ olduğuna göre $A(ABCD)$'nın kaç birimkare olduğunu bulalım.**

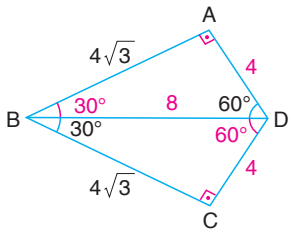
**Çözüm**

[BD] köşegeni açıortay olacağından,

$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC}) = 30°$ ve

$m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{ADB}) = 60°$ dir.

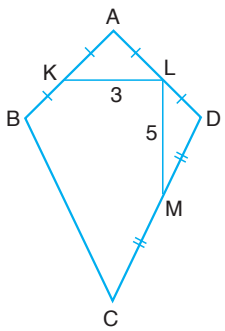
O hâlde $m(\widehat{BAD}) = 90°$ olur.




ABD üçgeninde,

$|AB| = 4\sqrt{3} \Rightarrow |AD| = 4$ br olur. *(30° – 60° – 90° üçgeni)*

Bu durumda $A(ABCD) = 2 \cdot A(\widehat{ABD}) = 2 \cdot \frac{4\sqrt{3} \cdot 4}{2} = 16\sqrt{3}$ br$^2$ bulunur.



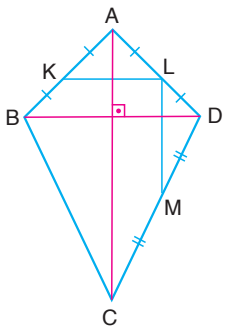

### 52. Örnek

ABCD deltoid; K, L ve M bulundukları kenarların orta noktalarıdır.

**$|AB| = |AD|$, $|BC| = |CD|$, $|KL| = 3$ br ve $|LM| = 5$ br olduğuna göre $A(ABCD)$'nın kaç birimkare olduğunu bulalım.**

**Çözüm**

[BD] ve [AC] köşegenlerini çizelim. ABD üçgeninde [KL], ADC üçgeninde [LM] orta taban olduğundan,




$|KL| = \frac{|BD|}{2} \Rightarrow |BD| = 2 \cdot 3 = 6$ br ve

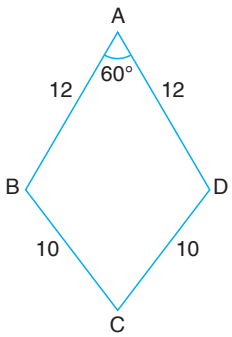
$|LM| = \frac{|AC|}{2} \Rightarrow |AC| = 2 \cdot 5 = 10$ br'dir.

O hâlde $A(ABCD) = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2}$

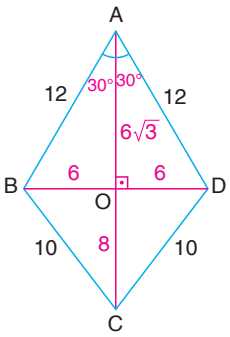
$= \frac{10 \cdot 6}{2} = 30$ br$^2$ bulunur.

## 53. Örnek

**ABCD deltoid, $|AB|=|AD|=12$ br, $|BC|=|CD|=10$ br ve $m(\widehat{BAD})=60°$ olduğuna göre $A(ABCD)$ nın kaç birimkare olduğunu bulalım.**




**Çözüm**




[AC] ve [BD] köşegenleri çizilirse $[AC] \perp [BD]$ olur.

$[AC] \cap [BD] = \{O\}$ olsun. ABD eşkenar üçgen olup $|BO| = |OD| = 6$ br ve $|AO| = 6\sqrt{3}$ br'dir.

BOC dik üçgeninde Pisagor teoremine göre,

$|BO|^2 + |OC|^2 = |BC|^2 \Rightarrow 6^2 + |OC|^2 = 10^2$

$\Rightarrow |OC| = 8$ br'dir.

O hâlde,

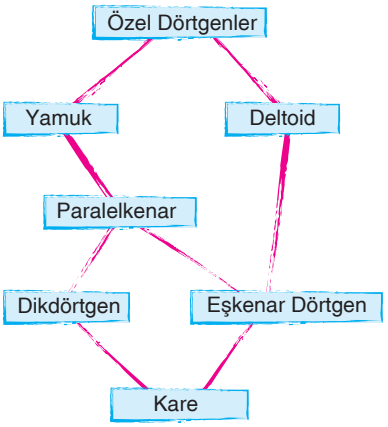
$$A(ABCD) = \frac{|AC|\cdot|BD|}{2} = \frac{(6\sqrt{3}+8)\cdot 12}{2} = (36\sqrt{3}+48)\ \text{br}^2$$ bulunur.

## İnceleyelim

**Özel dörtgenlerin özellikleri aşağıdaki tablo ile özetlenmiştir. İnceleyelim.**

***Tablo:*** Dörtgenlerin Özellikleri

| Özellikler | Yamuk | Paralelkenar | Dikdörtgen | Eşkenar Dörtgen | Kare | Deltoid |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Karşılıklı kenar uzunlukları eşittir. | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | |
| Sadece iki kenarı paraleldir. | ✓ | | | | | |
| Bütün kenar uzunlukları eşittir. | | | | ✓ | ✓ | |
| Karşılıklı kenarları paraleldir. | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | |
| Karşılıklı açıları eştir. | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | |
| Her bir açısı diktir. | | | ✓ | | ✓ | |
| Köşegenler birbirini ortalar. | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | |
| Köşegenler eştir. | | | ✓ | | ✓ | |
| Köşegenler dik kesişir. | | | | ✓ | ✓ | ✓ |
| Ardışık açıları bütünlerdir. | | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | |
| İç açılarının ölçüleri toplamı 360° dir. | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |
| Köşegenler açıortaydır. | | | | ✓ | ✓ | |
| Köşegenler simetri eksenidir. | | | | ✓ | ✓ | |




- Bir çift kenarı paralel olan dörtgenler yamuk olarak adlandırıldığından bu özelliği sağlayan paralelkenarın fazladan bir çift kenarı daha paraleldir. Buna göre her paralelkenarın aynı zamanda bir yamuk olduğunu söyleyebiliriz.
- Paralelkenarlar iç açılarının her biri dik olduğunda dikdörtgen adını alır. Eşkenar dörtgenler de paralelkenarın tüm kenar uzunluklarının eşit olduğu formudur.
- İç açıları dik açı olan dörtgenler dikdörtgen, tüm kenar uzunlukları eşit olan dörtgenler de eşkenar dörtgen olduğundan bu iki özelliği sağlayan kare hem dikdörtgen hem de eşkenar dörtgendir.
- Eşkenar dörtgen deltoidin tüm özelliklerini taşıdığından aynı zamanda bir deltoiddir.
- Kare aynı zamanda eşkenar dörtgen ve eşkenar dörtgen de bir deltoid olduğundan kare de bir deltoiddir.

## İnceleyelim

İslam mimarisinin ulaştığı en yüksek noktalardan biri sayılan Elhamra Sarayı, duvarlarında kırmızı tuğla ve damında kırmızı kiremit kullanılmış olmasından dolayı adını Arapçada kırmızı anlamına gelen ahmerden almıştır. 1001 gece masallarındaki rüya sarayların gerçek yaşamdaki izdüşümü sayılabilecek olan Elhamra'nın doğal çevreye uyumu, yaşanan mekân ile su ve yeşili belli bir ahenk içinde buluşturabilmesi ve farklı süslemeleri ile kazandığı şöhretin hiç de haksız olmadığını gösterir.

Elhamra Sarayı, Granada

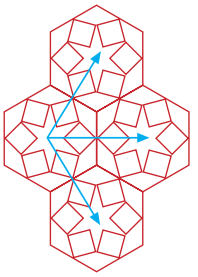
**Aşağıda Elhamra Sarayı duvarlarındaki desene benzer, içinde kare ve altıgenlerin olduğu bir süslemenin yapım aşamaları gösterilmiştir. İnceleyelim.**

**I.** Bir düzgün altıgen ve simetri ekseni olan köşegenleri çizilir. Köşegenlerin çizilmesiyle oluşan birbirine eş altı eşkenar üçgenden birinin içine bir kare çizilir.

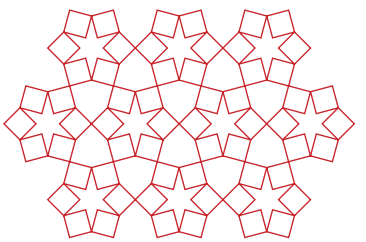
**II.** Altıgenin içine çizilen kare altıgenin merkezine göre altmışar derece döndürülüp kopyalanır.

Oluşturulan motifteki köşegenler silinir.

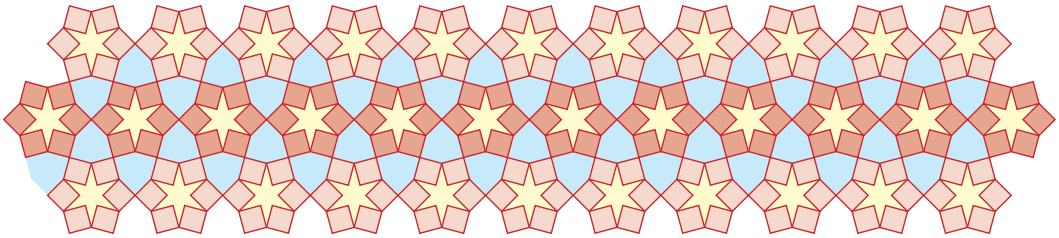
**III.** Oluşturulan motif koplayalanarak sağa, yukarı, aşağı ötelenerek yandaki gibi bir desen oluşturulur.



**IV.** Oluşturulan desendeki altıgenlerin kenarları silinir.



**V.**



Son olarak oluşturulan süslemedeki çokgenler renklendirilir.

## 5.3.12 Öğrendiğimizi Uygulayalım

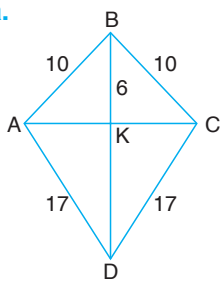
**1.** ***Tablo:*** Kenar ve Açı Özelliklerine Göre Dörtgenler

| Açıları ile İlgili Özellikleri / Kenarlarının Uzunlukları ile İlgili Özellikleri | Tüm Açıları Farklı | Karşılıklı Açıları Eş *(Tüm Açıları Eş Olmayan)* | Tüm Açıları Eş Olan |
|---|---|---|---|
| Kenar Uzunlukları Farklı Olan | A | B | C |
| Kenar Uzunlukları İkişer İkişer Eşit Olan *(Tümü Eşit Olmayan)* | D | E | F |
| Kenar Uzunluklarının Tümü Eşit Olan | G | H | K |

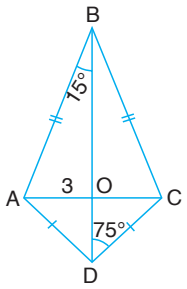
Yukarıdaki tabloda kenar ve açı bilgileri verilen dörtgenlerin (varsa) türlerini belirleyiniz.

**2.** Aşağıda verilen ABCD dörtgenleri deltoid olmak üzere, verilenlere göre A(ABCD) değerlerini $br^2$ cinsinden bulunuz.

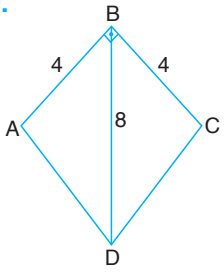
**a.**




**b.**

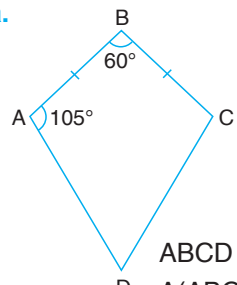



**c.**



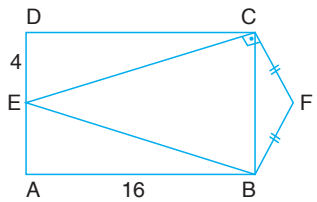

**3.** Aşağıda verilenlere göre istenenleri bulunuz.

**a.**




ABCD deltoid,
$A(ABCD) = (16 + 16\sqrt{3})\ br^2$
ise |BC| kaç br'dir?

**b.**




ABCD dikdörtgen,
EBFC deltoid
ise A(EBFC) kaç $br^2$ dir?

# 5.3 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI

**1.** Aşağıda verilen ifadelerle dörtgen adlarını eşleştiriniz.

**a.** Kenarları birbirine eş olan, fakat köşegenleri birbirine eş olmayan dörtgen

**b.** Köşegenleri birbirini dik ortalayan dörtgen

**c.** Karşılıklı kenarları eş ve köşegenleri birbirini ortalayan dörtgen

**ç.** Yalnızca karşılıklı iki kenar birbirine paralel olan dörtgen

**d.** Dikdörtgenin kenar özelliklerini taşıyan, ancak iç açılarının ölçüleri 90° olmayan dörtgen

**I.** Yamuk

**II.** Paralelkenar

**III.** Kare

**IV.** Dikdörtgen

**V.** Eşkenar dörtgen

**VI.** Deltoid

**2.** Aşağıdaki tabloda verilen özellikleri sağlayan dörtgenlerin ilgili hücrelerine "✓" işareti koyunuz..

***Tablo:*** Dörtgenler ve Özellikleri

| | Paralelkenar | Dikdörtgen | Eşkenar Dörtgen | Deltoid |
|---|---|---|---|---|
| Karşılıklı kenar uzunlukları eşittir. | | | | |
| Köşegenleri birbirini ortalar. | | | | |
| Açıları diktir. | | | | |
| Köşegenleri eşit uzunluktadır. | | | | |
| Ağırlık merkezi köşegenlerin kesim noktasıdır. | | | | |

**3.** Aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına (D), yanlış olanların başına (Y) yazınız.

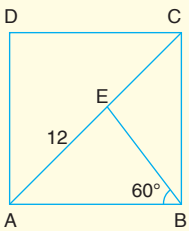
**a.** ☐ Yamuğun üç kenar uzunluğu birbirine eşit olamaz.

**b.** ☐ Köşegen uzunlukları eşit olan yamuğa ikizkenar yamuk denir.

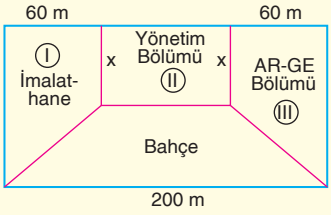
**c.** ☐ Her dikdörtgen aynı zamanda bir paralelkenardır.

**ç.** ☐ Deltoidin köşegenlerinin kesişim noktası aynı zamanda ağırlık merkezidir.

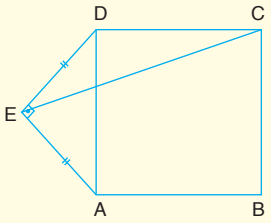
**4.** ABCD karesinde $m(\widehat{ABE}) = 60°$ ve $|AE| = 12$ br olduğuna göre karenin bir kenarının uzunluğu kaç birimdir?



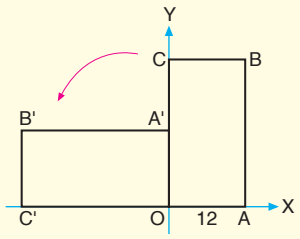

**5.** Yanda dikdörtgen şeklindeki arsaya I, II ve III numaralı bölümleri içeren bir bina yapılacaktır. Belirtilen üç bölümün alanları eşit olduğuna göre bahçenin alanının I numaralı bölümün alanına oranı kaçtır? (İmalathane, Bahçe ve AR-GE bölümleri yamuk şeklindedir.)




**6.** ABCD karesinde $[AE] \perp [ED]$, $|AE| = |ED|$ ve $|CE| = 2\sqrt{5}$ br olduğuna göre karenin alanı kaç $br^2$ dir?

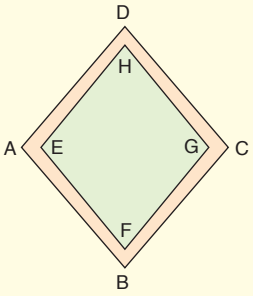


**7.**

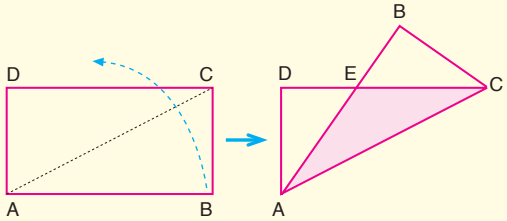



Koordinat düzleminde verilen OABC dikdörtgeni orijin etrafında 90° döndürülüp OA'B'C' dikdörtgeni elde ediliyor. Bu dönme sırasında B noktası $10\pi$ br yol almıştır. $|OA| = 12$ br olduğuna göre dikdörtgenlerin ağırlık merkezleri arasındaki uzaklık kaç birimdir?

**8.** Bir semtteki boş bir alana park yapılması kararlaştırılmıştır. Parkın bir bölümüne yandaki gibi eşkenar dörtgen şeklinde çim alan ve çevresine de koşu parkuru yapılacaktır. Çim ile kaplı alanın köşegen uzunlukları $|EG|$ ve $|FH|$, $|AC|$ ve $|BD|$ köşegenlerinden üçer metre daha kısadır. Koşu parkurunun alanı 549 $m^2$ olduğuna göre $|EG| + |FH|$ kaç metredir?



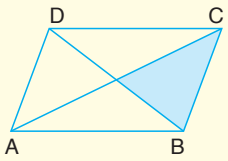

**9.**



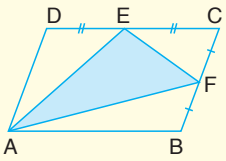

Yukarıda verilen dikdörtgen şeklindeki kâğıt [AC] köşegeni boyunca katlanarak sağdaki şekil elde ediliyor. $|AD| = 6$ cm ve $|AB| = 8$ cm olduğuna göre AEC üçgeninin alanı kaç $cm^2$ dir?

**10.** Aşağıda verilen paralelkenarların içinde verilen boyalı bölgelerin paralelkenarın alanına oranını bulunuz.

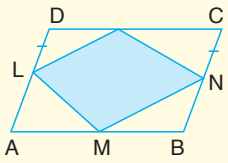
**a.**



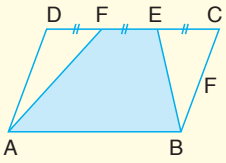

**b.**



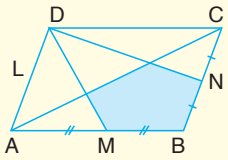

**c.**



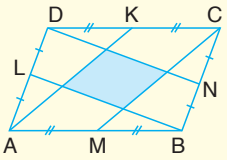

**ç.**



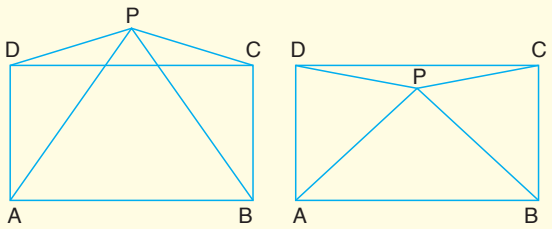

**d.**




**e.**




**11.**




Yukarıda verilen ABCD dikdörtgeni ile aynı düzlemde alınan bir P noktasının karşılıklı köşelere olan uzaklıkları arasında,

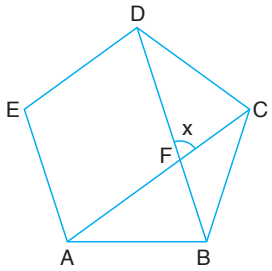
$|AP|^2 + |PC|^2 = |DP|^2 + |PB|^2$

eşitliği olduğunu gösteriniz.

# 5. ALT ÖĞRENME ALANI TESTİ

**1.** ABCDE düzgün beşgen

$[AC] \cap [BD] = \{F\}$

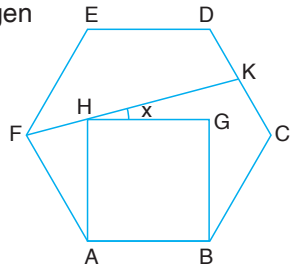



**Yukarıdaki verilere göre $m(\widehat{DFC}) = x$ kaç derecedir?**

A) 108 B) 96 C) 72 D) 54 E) 36

**2.** ABCDEF düzgün altıgen

ABGH kare

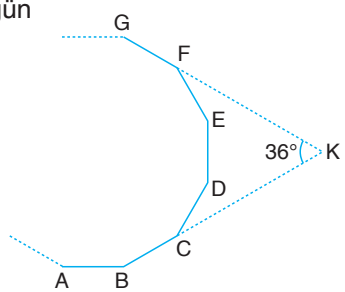



**Yukarıdaki verilere göre $m(\widehat{KHG}) = x$ kaç derecedir?**

A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

**3.** ABCDEFG... düzgün çokgenin ardışık köşeleri

$m(\widehat{BKG}) = 36°$




**Yukarıdaki verilere göre düzgün çokgenin kenar sayısı kaçtır?**

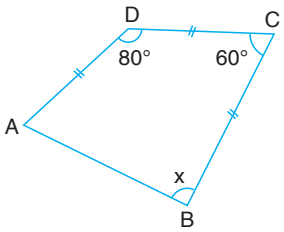
A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

**4.** ABCD dörtgen

$m(\widehat{BCD}) = 60°$

$m(\widehat{CDA}) = 80°$

$|BC| = |CD| = |DA|$




**Yukarıdaki verilere göre $m(\widehat{ABC}) = x$ kaç derecedir?**

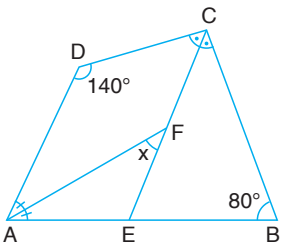
A) 150 B) 140 C) 130 D) 125 E) 120

**5.** ABCD dörtgen

[CE] ve [AF] açıortay

$m(\widehat{CDA}) = 140°$

$m(\widehat{ABC}) = 80°$




**Yukarıdaki verilere göre $m(\widehat{AFE}) = x$ kaç derecedir?**

A) 45 B) 40 C) 35 D) 30 E) 25

**6.** ABCD dörtgen

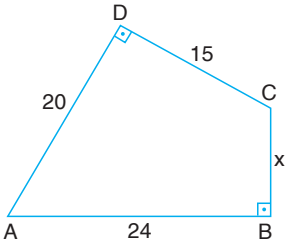
$[AD] \perp [DC]$

$[AB] \perp [BC]$

$|CD| = 15$ br

$|DA| = 20$ br

$|AB| = 24$ br




**Yukarıdaki verilere göre $|BC| = x$ kaç br'dir?**

A) 5 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

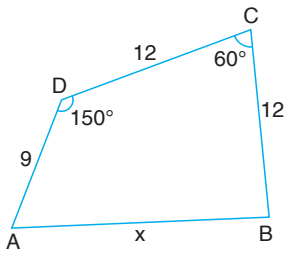
**7.** ABCD dörtgen

$m(\widehat{BCD}) = 60°$

$m(\widehat{CDA}) = 150°$

$|BC| = |CD| = 12$ br

$|DA| = 9$ br




**Yukarıdaki verilere göre $|AB| = x$ kaç br'dir?**

A) 9 B) $9\sqrt{2}$ C) 15 D) $12\sqrt{2}$ E) 17

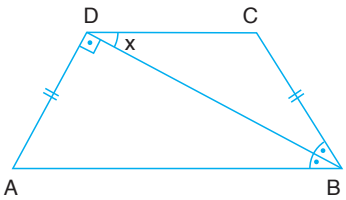
**8.** ABCD yamuk

$[AB] // [DC]$

$[BD]$ açıortay

$[BD] \perp [AD]$

$|AD| = |BC|$




**Yukarıdaki verilere göre $m(\widehat{BDC}) = x$ kaç derecedir?**

A) 15 B) 20 C) 30 D) 35 E) 40

**9.** ABCD yamuk

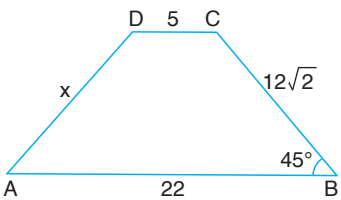
$[AB] // [DC]$

$m(\widehat{ABC}) = 45°$

$|AB| = 22$ br

$|BC| = 12\sqrt{2}$ br

$|CD| = 5$ br




**Yukarıdaki verilere göre $|AD| = x$ kaç br'dir?**

A) $16\sqrt{2}$ B) 20 C) $12\sqrt{2}$ D) 15 E) 13

**10.** ABCD yamuk

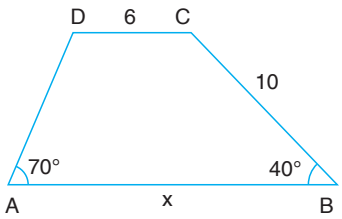
$[AB] // [DC]$

$m(\widehat{DAB}) = 70°$

$m(\widehat{ABC}) = 40°$

$|BC| = 10$ br

$|CD| = 6$ br



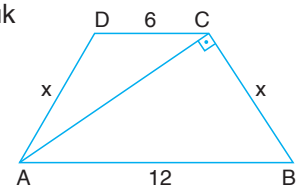

**Yukarıdaki verilere göre $|AB| = x$ kaç br'dir?**

A) 16 B) 20 C) 22 D) 24 E) 26

**11.** ABCD ikizkenar yamuk

$[AC] \perp [BC]$

$|AB| = 2|DC| = 12$ br




**Yukarıdaki verilere göre $|BC| = |DA| = x$ kaç br'dir?**

A) 4 B) $3\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{7}$ D) $4\sqrt{2}$ E) 6

**12.** ABCD yamuk

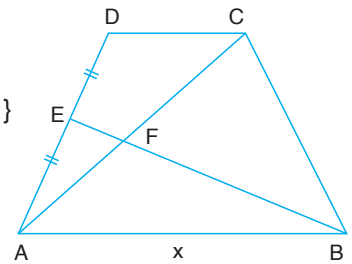
$[AB] // [DC]$

$[AC] \cap [BE] = \{F\}$

$|AE| = |ED|$

$7|AF| = 5|FC|$

$|DC| = 6$ br




**Yukarıdaki verilere göre $|AB| = x$ kaç br'dir?**

A) 12 B) 15 C) 16 D) 18 E) 24

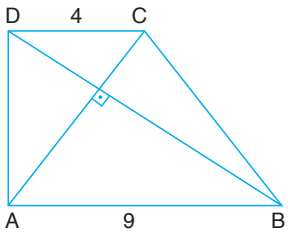
**13.** ABCD dik yamuk

$[AD] \perp [AB]$

$[AC] \perp [BD]$

$|DC| = 4$ br

$|AB| = 9$ br




**Yukarıdaki verilere göre A(ABCD) kaç br² dir?**

A) 25 B) 30 C) 32 D) 36 E) 39

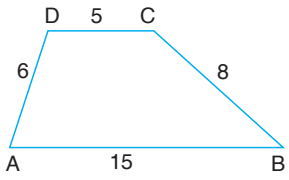
**14.** ABCD yamuk

$[AB] // [DC]$

$|AB| = 3|DC| = 15$ br

$|BC| = 8$ br

$|DA| = 6$ br




**Yukarıdaki verilere göre A(ABCD) kaç br² dir?**

A) 48 B) 50 C) 54 D) 60 E) 72

**15.** ABCD yamuk

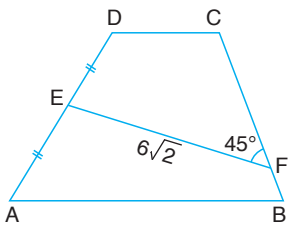
$[AB] // [DC]$

$|AE| = |ED|$

$|EF| = 6\sqrt{2}$ br

$|BC| = 10$ br

$m(\widehat{EFC}) = 45°$




**Yukarıdaki verilere göre A(ABCD) kaç br² dir?**

A) 30 B) 40 C) 45 D) 60 E) 72

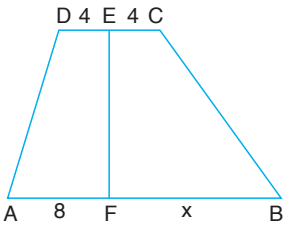
**16.** ABCD yamuk

$[AB] // [DC]$

$|AF| = 8$ br

$|CE| = |ED| = 4$ br

$5A(AFED) = 3A(FBCE)$




**Yukarıdaki verilere göre |FB| = x kaç br'dir?**

A)10 B) 12 C) 15 D) 16 E) 18

**17.** ABCD dörtgen

$[AC]$ ve $[BD]$ köşegen

$|BM| = |MA|$

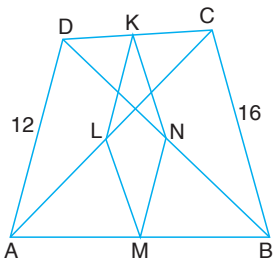
$|CK| = |KD|$

$|AL| = |LC|$

$|BN| = |DN|$

$|AD| = 12$ br

$|BC| = 16$ br




**Yukarıdaki verilere göre Ç(KLMN) kaç br'dir?**

A) 14 B) 18 C) 24 D) 28 E) 32

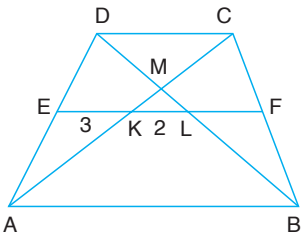
**18.** ABCD yamuk

$[EF]$ orta taban

$[AC] \cap [BD] = \{M\}$

$|EK| = 3$ br

$|KL| = 2$ br




**Yukarıdaki verilere göre |AB| + |DC| kaç br'dir?**

A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 18

**19.** ABCD dik yamuk

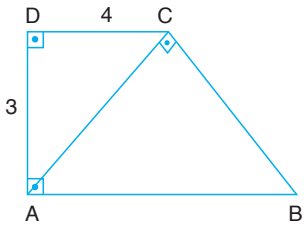
$[DC] // [AB]$

$[AD] \perp [AB]$

$[AC] \perp [CB]$

$|AD| = 3$ br

$|DC| = 4$ br




**Yukarıdaki verilere göre A(ABCD) kaç br$^2$ dir?**

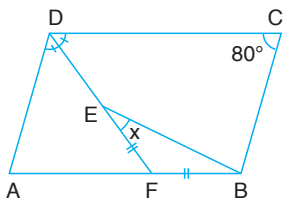
A) $\frac{108}{5}$ B) $\frac{123}{8}$ C) $\frac{118}{13}$ D) 7 E) $\frac{96}{25}$

**20.** ABCD paralelkenar

$m(\widehat{CDF}) = m(\widehat{FDA})$

$m(\widehat{BCD}) = 80°$

$|FB| = |FE|$




**Yukarıdaki verilere göre $m(\widehat{BEF}) = x$ kaç derecedir?**

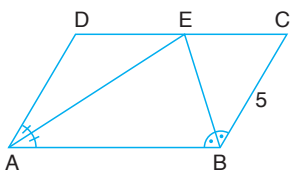
A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

**21.** ABCD paralelkenar

$[AE]$ ve $[BE]$ açıortay

$E \in [CD]$

$|BC| = 5$ br




**Yukarıdaki verilere göre ABCD paralelkenarının çevresi kaç cm'dir?**

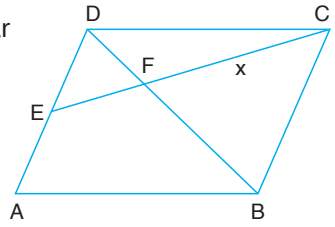
A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

**22.** ABCD paralelkenar

$[BD] \cap [CE] = \{F\}$

$|CE| = 5|FE|$

$|CE| = 20$ br




**Yukarıdaki verilere göre $|FC| = x$ kaç br'dir?**

A) 16 B) 15 C) 12 D) 10 E) 8

**23.** ABCD paralelkenar

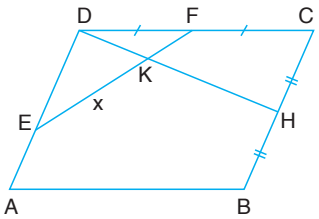
$[HD] \cap [FE] = \{K\}$

$|BH| = |HC|$

$|DF| = |FC|$

$|DE| = 2|EA|$

$|EF| = 11$ br




**Yukarıdaki verilere göre $|EK| = x$ kaç br'dir?**

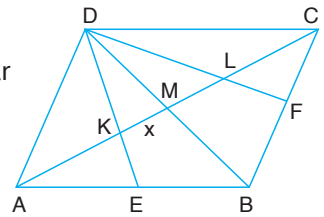
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

**24.** ABCD paralelkenar

E ve F orta noktalar

$[BD]$ ve $[AC]$ köşegen

$|AC| = 24$ br




**Yukarıdaki verilere göre $|KM| = x$ kaç br'dir?**

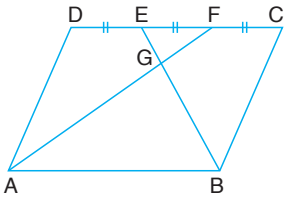
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

**25.** ABCD paralelkenar

$[BE] \cap [AF] = \{G\}$

$|DE| = |EF| = |FC|$

$A(\widehat{GFE}) = 3\,br^2$




**Yukarıdaki verilere göre A(ABCD) kaç $br^2$ dir?**

A) 60 B) 64 C) 72 D) 84 E) 86

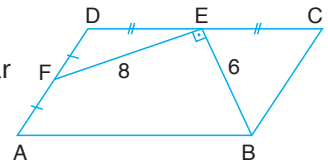
**26.** ABCD paralelkenar

E ve F orta noktalar

$[BE] \perp [EF]$

$|BE| = 6$ br

$|EF| = 8$ br




**Yukarıdaki verilere göre A(ABCD) kaç $br^2$ dir?**

A) 64 B) 72 C) 80 D) 88 E) 96

**27.** ABCD paralelkenar

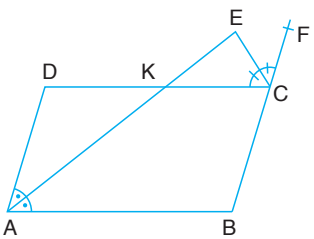
B, C, F doğrusal noktalar

[CE] ve [AE] açıortay

$|DK| = 2|KC|$

$|EC| = 4$ br

$|AK| = 9$ br



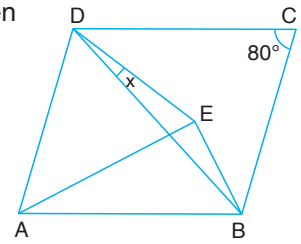

**Yukarıdaki verilere göre A(ABCD) kaç $br^2$ dir?**

A) 84 B) 96 C) 108 D) 126 E) 144

**28.** ABCD eşkenar dörtgen

AED eşkenar üçgen

$m(\widehat{BCD}) = 80°$




**Yukarıdaki verilere göre $m(\widehat{BDE}) = x$ kaç derecedir?**

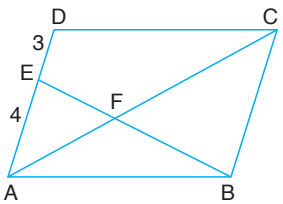
A) 30 B) 25 C) 20 D) 15 E) 10

**29.** ABCD paralelkenar

[AC] köşegen

$|AE| = 4$ cm

$|ED| = 3$ cm




**Yukarıdaki verilere göre $\frac{|BF|}{|BE|}$ oranı kaçtır?**

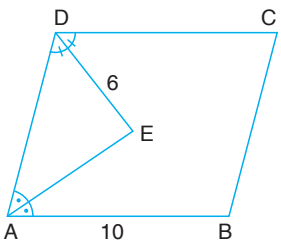
A) $\frac{4}{11}$ B) $\frac{7}{11}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{11}{7}$ E) $\frac{11}{4}$

**30.** ABCD eşkenar dörtgen

[DE] ve [AE] açıortay

$|AB| = 10$ br

$|DE| = 6$ br




**Yukarıdaki verilere göre A(ABCD) kaç $br^2$ dir?**

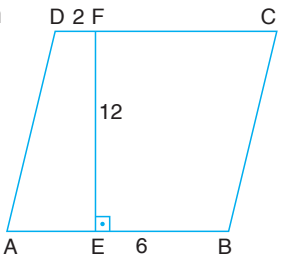
A) 96 B) 108 C) 120 D) 132 E) 144

**31.** ABCD eşkenar dörtgen

$[FE] \perp [AB]$

$|DF| = 2$ br

$2|EB| = |FE| = 12$ br




**Yukarıdaki verilere göre $A(ABCD)$ kaç br$^2$ dir?**

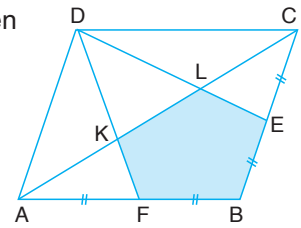
A) 158 B) 156 C) 144 D) 132 E) 120

**32.** ABCD eşkenar dörtgen

$[AC]$ köşegen

E ve F orta noktalar

$A(\widehat{DKL}) = 12$ br$^2$




**Yukarıdaki verilere göre boyalı bölgenin alanı kaç br$^2$ dir?**

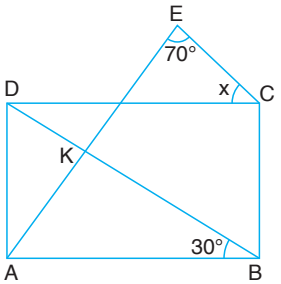
A) 18 B) 20 C) 24 D) 30 E) 36

**33.** ABCD dikdörtgen

$|AE| = |BD|$

$m(\widehat{CEA}) = 70°$

$m(\widehat{ABD}) = 30°$




**Yukarıdaki verilere göre $m(\widehat{DCE}) = x$ kaç derecedir?**

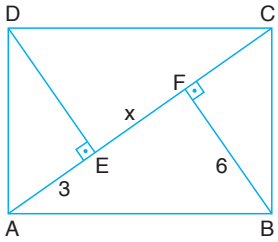
A) 25 B) 30 C) 35 D) 40 E) 45

**34.** ABCD dikdörtgen

$[DE] \perp [AC]$

$[BF] \perp [AC]$

$|BF| = 2|AE| = 6$ br




**Yukarıdaki verilere göre $|FE| = x$ kaç br'dir?**

A) 3 B) 5 C) 6 D) 8 E) 9

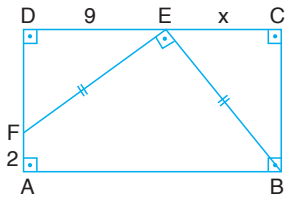
**35.** ABCD dikdörtgen

$[EB] \perp [EF]$

$|EB| = |EF|$

$|ED| = 9$ br

$|FA| = 2$ br




**Yukarıdaki verilere göre $|EC| = x$ kaç br'dir?**

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

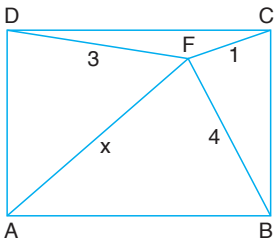
**36.** ABCD dikdörtgen

F, iç bölgede herhangi bir nokta

$|FC| = 1$ br

$|FB| = 4$ br

$|FD| = 3$ br




**Yukarıdaki verilere göre $|AF| = x$ kaç br'dir?**

A) 6 B) 5 C) $2\sqrt{6}$ D) $3\sqrt{2}$ E) 4

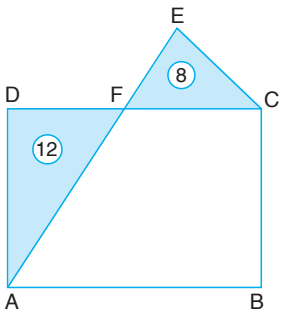
**37.** ABCD dikdörtgen

$[DC] \cap [AE] = \{F\}$

$|AF| = 3|EF|$

$A(\widehat{AFD}) = 12\,br^2$

$A(\widehat{CEF}) = 8\,br^2$




**Yukarıdaki verilere göre A(ABCD) kaç $br^2$ dir?**

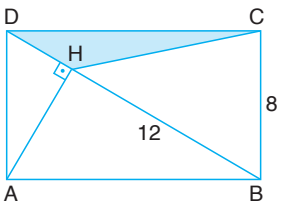
A) 36 B) 60 C) 72 D) 90 E) 108

**38.** ABCD dikdörtgen

$[AH] \perp [BD]$

$|BC| = 8$ br

$|BH| = 12$ br




**Yukarıdaki verilere göre $A(\widehat{HCD})$ kaç $br^2$ dir?**

A) $12\sqrt{3}$ B) $10\sqrt{3}$ C) $9\sqrt{3}$ D) $8\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

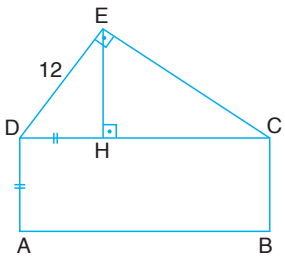
**39.** ABCD dikdörtgen

$[EH] \perp [CD]$

$[CE] \perp [ED]$

$|HD| = |DA|$

$|ED| = 12$ br




**Yukarıdaki verilere göre A(ABCD) kaç $br^2$ dir?**

A) 72 B) 108 C) 132 D) 144 E) 156

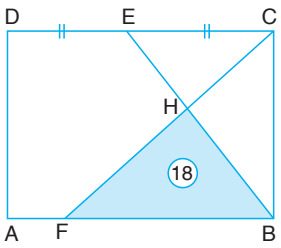
**40.** ABCD dikdörtgen

$[FC] \cap [BE] = \{H\}$

$|CE| = |ED|$

$|FB| = 3|AF|$

$A(\widehat{FBH}) = 18\,br^2$




**Yukarıdaki verilere göre A(ABCD) kaç $br^2$ dir?**

A) 80 B) 84 C) 90 D) 96 E) 100

**41.** ABCD dikdörtgen

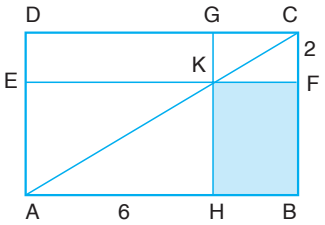
$[AB] // [EF]$

$[HG] // [BC]$

$[AC] \cap [GH] = \{K\}$

$|CF| = 2$ cm

$|AH| = 6$ cm



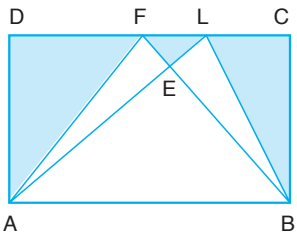

**Yukarıdaki verilere göre HBFK dikdörtgeninin alanı kaç $br^2$ dir?**

A) 6 B) 8 C) 9 D) 12 E) 24

**42.** ABCD dikdörtgen

$[AL] \cap [BF] = \{E\}$

$m(\widehat{AEB}) = 14\,cm^2$




**Yukarıdaki verilere göre mavi boyalı alanlar toplamı kaç $cm^2$ dir?**

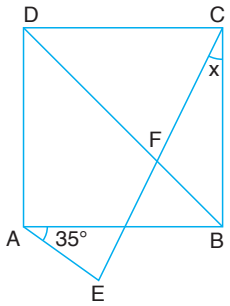
A) 7 B) 12 C) 14 D) 21 E) 28

**43.** ABCD kare

$[EC] \cap [BD] = \{F\}$

$|BD| = |CE|$

$m(\widehat{BAE}) = 35°$




**Yukarıdaki verilere göre $m(\widehat{BCE}) = x$ kaç derecedir?**

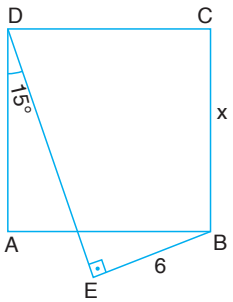
A) 10 B) 15 C) 20 D) 25 E) 30

**44.** ABCD kare

$[DE] \perp [EB]$

$m(\widehat{EDA}) = 15°$

$|EB| = 6$ br



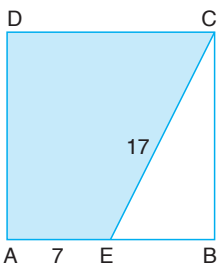

**Yukarıdaki verilere göre $|BC| = x$ kaç br'dir?**

A) $8\sqrt{2}$ B) 12 C) 10 D) $6\sqrt{2}$ E) 6

**45.** ABCD kare

$|AE| = 7$ br

$|CE| = 17$ br



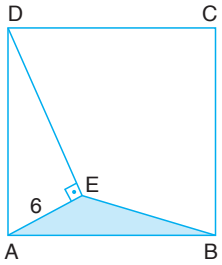

**Yukarıdaki verilere göre boyalı bölgenin alanı kaç br$^2$ dir?**

A) 165 B) 175 C) 180 D) 185 E) 190

**46.** ABCD kare

$[DE] \perp [AE]$

$|AE| = 6$ br




**Yukarıdaki verilere göre $A(\widehat{AEB})$ kaç br$^2$ dir?**

A) 12 B) 15 C) 18 D) 24 E) 36

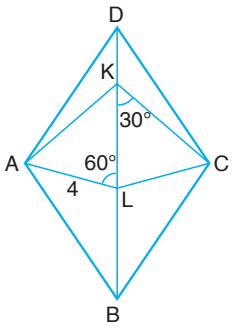
**47.** ABCD eşkenar dörtgen

$[DB]$ köşegen

$m(\widehat{BKC}) = 30°$

$m(\widehat{ALD}) = 60°$

$|AL| = 4$ br




**Yukarıdaki verilere göre ALCK dörtgeninin alanı kaç br$^2$ dir?**

A) $6\sqrt{3}$ B) $8\sqrt{3}$ C) $12\sqrt{3}$
D) $16\sqrt{3}$ E) $18\sqrt{3}$

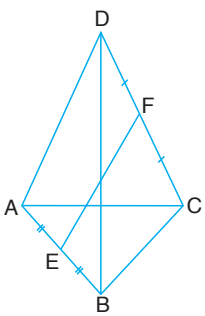
**48.** ABCD deltoidi

$|AD| = |DC|$

$|AB| = |BC|$

$|AC| = 10$ br

$|BD| = 14$ br




**Yukarıdaki şekilde E ve F bulundukları kenarların orta noktaları olduğuna göre $|EF|$ kaç br'dir?**

A) $3\sqrt{5}$ B) $5\sqrt{2}$ C) $\sqrt{74}$ D) $5\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{5}$

# 6. ALT ÖĞRENME ALANI

# UZAY GEOMETRİ

## Konular

### 6.1 Katı Cisimler

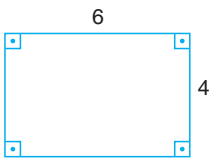
*Günlük hayatımızda kullandığımız araç ve gereçler, yaşadığımız binalar ve çalıştığımız ofisler belirli bir alan ve hacim belirtir. Bu ünitede günlük hayatımızda sıklıkla uzunluk, alan ve hacim hesabı yapmamızı gerektiren katı cisimlerle ilgili uygulamalar yapacağız.*

# Hazır mısınız?

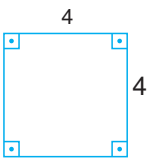
6. Alt Öğrenme Alanı

**1.** Aşağıdaki çokgenlerin çevre uzunluklarını birim cinsinden bulunuz.

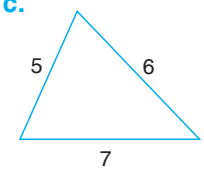
**a.**



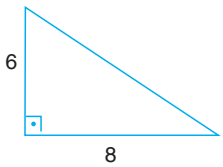

**b.**




**c.**

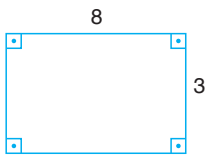



**ç.**

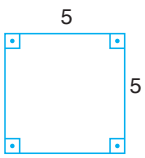



**2.** Aşağıdaki çokgenlerin alanlarını birimkare cinsinden bulunuz.

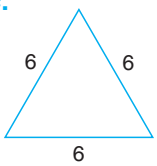
**a.**



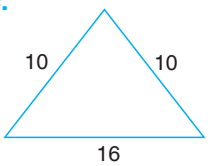

**b.**




**c.**

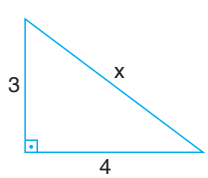



**ç.**

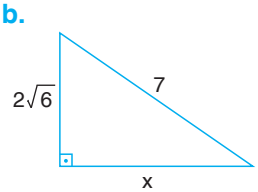



**3.** Aşağıdaki dik üçgenlerde verilenlere göre x'in kaç birim olduğunu bulunuz.

**a.**

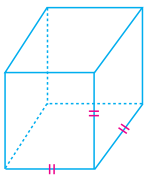



**b.**

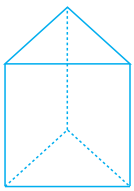



**4.** Verilen geometrik cisimlere göre tabloyu tamamlayınız.

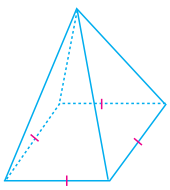
**I.**



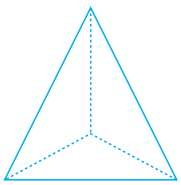
**II.**



**III.**



**IV.**

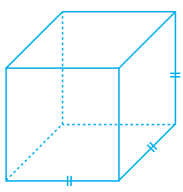


***Tablo:*** Cisimler ve Özellikleri

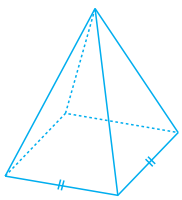
| | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| Cisimin Adı | | | | |
| Ayrıt Sayısı | | | | |
| Yanal Yüz Sayısı | | | | |
| Köşe Sayısı | | | | |

**5.** Aşağıdaki cisimler tabanlarına paralel bir düzlemle kesildiğinde elde edilen arakesit bölgelerinin ne olduğunu açıklayınız.

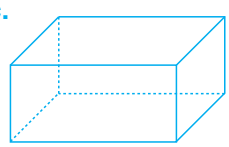
**a.**



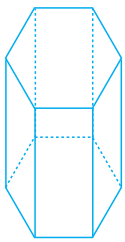
**b.**



**c.**



**ç.**



KONU 6.1

# KATI CİSİMLER

## Dik Prizma ve Dik Piramitler

**Neler Öğreneceğiz?**

- Dik prizma ve dik piramitlerin temel elemanlarını ve özelliklerini
- Dik prizma ve piramitlerin alan ve hacimlerini bulmayı

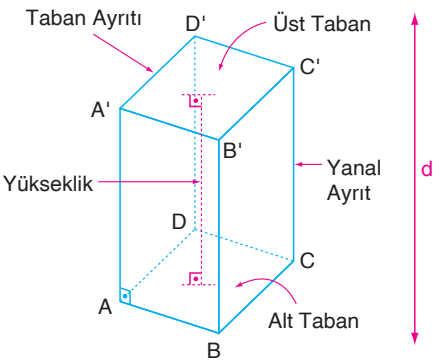
Günlük Hayat Bağlantısı

Keops Piramit'i, Mısır'ın Kahire şehrindeki Gize mezar kentinde bulunan üç anıtsal piramitten en eski ve en büyük olanıdır. MÖ 2500'lü yıllarda yapıldığı sanılan ve içinde onlarca gizem barındıran bu anıtsal kompleks, Dünya'nın yedi harikasından biri olup bu yedi harikadan günümüze dek ulaşan tek eser olma niteliğini de taşır. İnşa tekniği hakkında birçok teori üretilmiş olmasına rağmen kesin olarak nasıl yapıldıkları bilgisine ulaşamadığımız piramitler dünyanın dört bir yanında günümüz mimarlarına ilham kaynağı olmuştur.

Keops Piramit'i, Kahire

Prizmalar birbirine paralel iki taban ve yanal yüzden oluşur. Prizmalar taban şekillerine göre adlandırılırlar. Örneğin prizmanın tabanı kare ise kare prizma olarak adlandırılır.

Prizmanın taban kenarlarını oluşturan doğru parçaları taban ayrıtlarını, prizmanın tabanlarının karşılıklı köşe noktalarını birleştiren doğru parçaları da yanal ayrıtları oluşturur.




Yukarıdaki prizmanın yanal ayrıtları tabanların bulunduğu düzlemlere dik olduğundan prizma, dik prizma olarak adlandırılır.

Prizmanın iki tabanı arasındaki uzaklık prizmanın yüksekliğidir.

İki yanal ayrıt arasında kalan ve tabanın kenar sayısı kadar olan dikdörtgenler, prizmanın yanal yüzlerini oluşturur. Şekildeki kare prizmanın tabanının dört kenarı olduğundan dört yanal yüzü vardır.

## Dik Prizmaların Alan ve Hacimleri

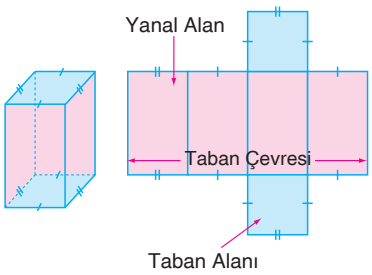
- *Yanal ayrıtları taban düzlemine dik olan prizmalara dik prizma denir.*
- *Dik prizmalar, taban şekillerine göre isimlendirilir: üçgen dik prizma, dörtgen dik prizma, altıgen dik prizma vb.*
- *Dik prizmaların yan yüzeyleri dikdörtgendir.*
- *Yan ayrıtları dik prizmanın yüksekliğidir.*

- *Bütün prizmaların alan ve hacimleri aynı şekilde hesaplanır.*

*Yanal Alanı = (Taban Çevresi) . (Yükseklik)*

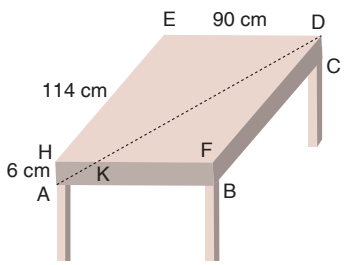
*Yüzey Alanı = 2 (Taban Alanı) + (Yanal Alan)*

*Hacmi = (Taban Alanı) . (Yükseklik)*




### 1. Örnek

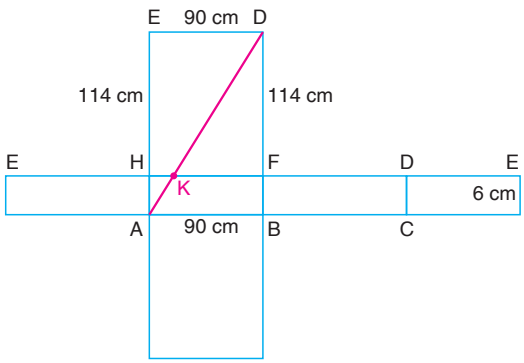
Yandaki masanın üst kısmı dikdörtgenler prizması şeklindedir. $|HA| = 6$ cm, $|HE| = 114$ cm ve $|ED| = 90$ cm'dir. Masanın A köşesinde bulunan bir karınca şekildeki yolu izleyerek D noktasına ulaşmıştır.




**Buna göre karıncanın aldığı yolun en küçük değerini cm cinsinden bulalım.**

#### Çözüm

Dikdörtgenler prizması şeklindeki masanın üst kısmının açınımı ve karıncanın aldığı yol yandaki gibidir.

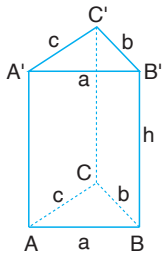



Buna göre karıncanın aldığı yolun en küçük değeri ABDE dikdörtgeninin [AD] köşegeninin uzunluğu kadardır.

O hâlde ABD üçgeninde Pisagor teoremini uygulayalım.

$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 \Rightarrow |AD|^2 = 90^2 + (114 + 6)^2$$
$$\Rightarrow |AD|^2 = 90^2 + 120^2$$
$$\Rightarrow |AD|^2 = 22\,500$$
$$\Rightarrow |AD| = 150 \text{ cm bulunur.}$$

### Üçgen Dik Prizma




*Yanal Alanı* $= (a + b + c) \cdot h$

*Yüzey Alanı* $= 2 \cdot A(\widehat{ABC}) + (a + b + c) \cdot h$

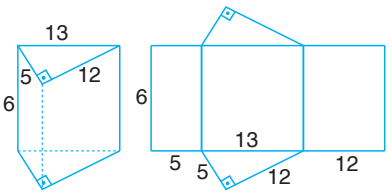
*Hacmi* $= A(\widehat{ABC}) \cdot h$

**2. Örnek**

Tabanı, kenar uzunlukları 5 br, 12 br ve 13 br olan dik üçgen şeklindeki üçgen dik prizmanın yüksekliği 6 br'dir.

**Buna göre dik üçgen dik prizmanın yüzey alanını $br^2$ ve hacmini $br^3$ cinsinden bulalım.**

**Çözüm**




Dik üçgen dik prizmanın kapalı ve açık şekli yandaki gibidir.

Yanal Alan = (Taban Çevresi) · Yükseklik
$= (5 + 12 + 13) \cdot 6$
$= 180\ br^2$ dir.

Alt ve üst tabanlarının alanları toplamı,

$2 \cdot A(\widehat{ABC}) = 2 \cdot \frac{5 \cdot 12}{2} = 60\ br^2$ dir.

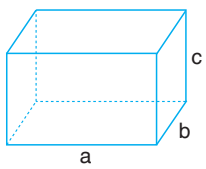
Buna göre verilen dik üçgen dik prizmanın alanı,

Yüzey Alanı = 2 (Taban Alanı) + (Yanal Alan)
$= 60 + 180$
$= 240\ br^2$ olur.

Şimdi dik üçgen dik prizmanın hacmini hesaplayalım:

Hacim = (Taban Alanı) . (Yükseklik) *(Taban Alanı* $= A(\widehat{ABC}) = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30\ br^2$*)*
$= 30 \cdot 6$
$= 180\ br^3$ elde edilir.

### Dikdörtgenler Prizması




*Yanal Alanı* $= 2(a + b) \cdot c$

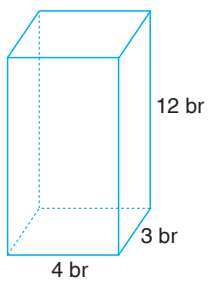
*Yüzey Alanı* $= 2(ab + ac + bc)$

*Hacmi* $= a \cdot b \cdot c$

**3. Örnek**

**Taban ayrıtlarının uzunlukları 3 br, 4 br ve yüksekliği 12 br olan dikdörtgenler prizmasının yanal alanını ve yüzey alanını $br^2$ cinsinden, hacmini $br^3$ cinsinden bulalım.**

**Çözüm**




Dikdörtgenler prizmasının ayrıtları a, b, c olmak üzere a = 4 br, b = 3 br ve c = 12 br olsun.

Buna göre dikdörtgenler prizmasının,

Yanal Alanı $= 2(a + b) \cdot c$
$= 2 \cdot (4 + 3) \cdot 12 = 168\ br^2$ dir.

Yüzey Alanı $= 2(ab + ac + bc) = 2 \cdot (4 \cdot 3 + 4 \cdot 12 + 3 \cdot 12)$
$= 192\ br^2$ dir.

Hacmi $= a \cdot b \cdot c = 3 \cdot 4 \cdot 12$
$= 144\ br^3$ bulunur.

## 4. Örnek

Taban ayrıtlarının uzunluğu 30 cm, 40 cm ve yüksekliği 60 cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki bir kutuya kare dik prizma şeklinde hediye paketleri kutuda boşluk kalmayacak şekilde yerleştirilecektir.

**Hediye paketlerinin taban ayrıtlarının uzunluğu 10 cm ve yüksekliği 12 cm olduğuna göre kutunun içine en çok kaç tane hediye paketi konulabileceğini bulalım.**

### Çözüm

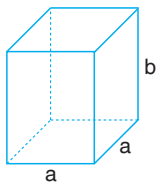
Dikdörtgenler prizması şeklindeki kutuda boşluk kalmaması için hediye paketleri, tabanı kutunun tabanına paralel olacak şekilde yerleştirilmelidir.

Buna göre kutunun 40 cm uzunluğundaki taban ayrıtı boyunca $\frac{40}{10}=4$ adet, 30 cm uzunluğundaki ayrıtı boyunca $\frac{30}{10}=3$ adet hediye paketi yerleştirilmelidir. Bu şekilde bir sıra, $4 \times 3 = 12$ hediye paketinden oluşur.

Kutunun tamamı $\frac{60}{12}=5$ sıra hediye paketi ile dolar.

O hâlde kutuya toplam $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ hediye paketi yerleştirilmelidir.

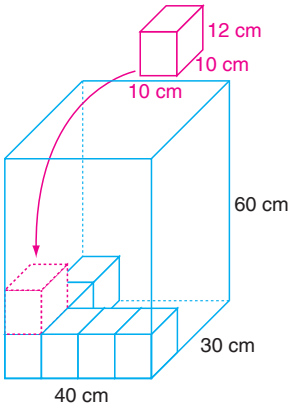
### Kare Dik Prizma




*Yanal Alanı* $= 4ab$

*Yüzey Alanı* $= 4ab + 2 \cdot a^2$

*Hacmi* $= a^2 \cdot b$




## 5. Örnek

Ayrıt uzunluğu 20 cm olan küp şeklindeki karpuzun bir köşesinden ayrıt uzunluğu 5 cm olan küp şeklinde bir parça kesilip çıkarılıyor.

**Buna göre karpuzun yüzey alanındaki değişim $cm^2$ cinsinden ve hacmindeki değişimi $cm^3$ cinsinden bulalım.**

### Çözüm

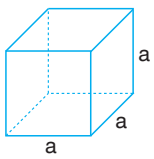
Küp şeklindeki karpuzun bir köşesinden çıkarılan küp, karpuzun yüzey alanını değiştirmez. Küp çıkarılmadan önce görünen 3 yüzeyin eşi çıkarıldıktan sonra prizmanın içinde oluşacağından kaybedilen ve kazanılan yüzey alanları eşittir. O hâlde alan değişmez.

Buna göre kalan cismin yüzey alanı A ise,

$A = 6 . 20^2 = 2400\ cm^2$ bulunur.

Küpün hacmi ise kesilen parçanın hacmi kadar azalır.

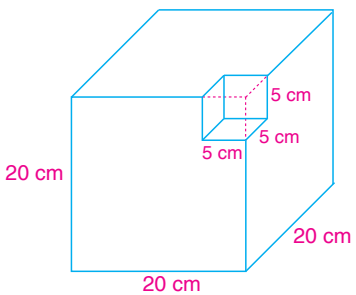
### Küp




*Yanal Alanı* $= 4a^2$

*Yüzey Alanı* $= 6a^2$

*Hacmi* $= a^3$

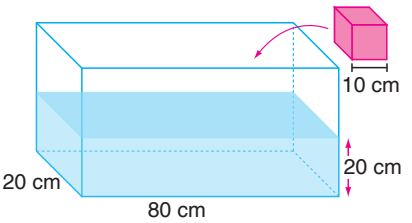


Büyük küpün hacmi $V$ ve çıkarılan küpün hacmi $V_1$ olmak üzere kalan parçanın hacmi,

$$V - V_1 = 20^3 - 5^3$$
$$= 8000 - 125 = 7875\ cm^3 \text{ bulunur.}$$

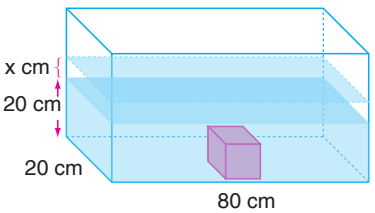
## 6. Örnek

Yanda verilen dikdörtgenler prizması şeklindeki akvaryumun içine bir ayrıtının uzunluğu 10 cm olan bir küp atıldığında suya batıyor.




**Buna göre akvaryum içindeki suyun kaç cm yükseleceğini bulalım.**

### Çözüm



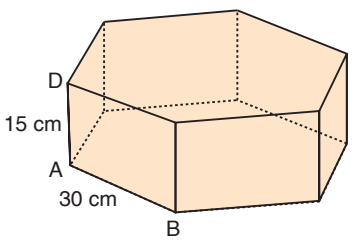

Akvaryuma küp atıldığında suyun yüksekliği artacaktır. Suyun yüksekliği x cm artmış olsun. Yükselen suyun kapladığı hacim, taban ayrıtları 20 cm, 80 cm ve yüksekliği x cm olan dikdörtgenler prizmasının hacmi kadardır. Bu prizmanın hacmi, suya atılan küpün hacmine eşittir.

Buna göre,

$$x \cdot 20 \cdot 80 = 10^3 \Rightarrow 1600x = 1000$$
$$\Rightarrow x = \frac{10}{16}$$
$$\Rightarrow x = \frac{5}{8}$$
$$\Rightarrow x = 0{,}625\text{'tir.}$$

O hâlde akvaryumdaki su 0,625 cm yükselir.

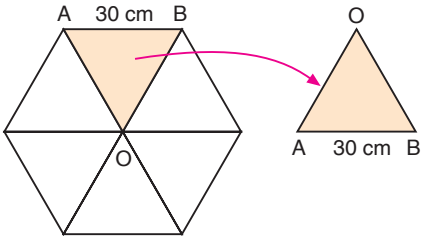
## 7. Örnek




**Şekildeki düzgün altıgen dik prizmanın tabanının bir kenarının uzunluğu 30 cm ve yüksekliği 15 cm olduğuna göre düzgün altıgen dik prizmanın yüzey alanını $cm^2$ cinsinden bulalım.**

**Çözüm**

Prizmanın taban alanı, düzgün altıgeni oluşturan 6 eş eşkenar üçgenin alanları toplanarak bulunur.




Bir kenar uzunluğu a br olan eşkenar üçgenin alanı $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $br^2$ olduğundan düzgün altıgenin alanı da $6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $br^2$ olur.

Buna göre $A(\widehat{AOB}) = \frac{30^2\sqrt{3}}{4} = 225\sqrt{3}$ $cm^2$ olup yer minderinin tabanının alanı da $6 \cdot A(\widehat{AOB}) = 6 \cdot 225\sqrt{3} = 1350\sqrt{3}$ $cm^2$ olarak bulunur.

Düzgün altıgen dik prizmanın yüzey alanı,

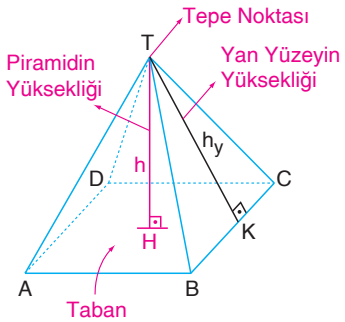
Y.A. = 2 . (Taban alanı) + (Yükseklik) · (Tabanın çevre uzunluğu)

$= 2 \cdot 1350\sqrt{3} + 15 \cdot (6 \,.\, 30)$

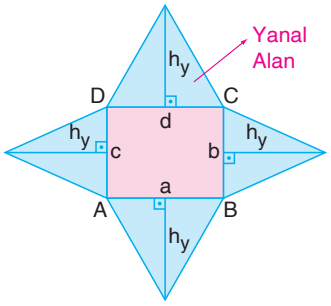
$= (2700\sqrt{3} + 2700)$ $cm^2$ bulunur.

## Dik Piramitlerin Alan ve Hacimleri

- *Herhangi bir çokgen şeklinde bir taban ile bu çokgenin belirttiği düzlemin dışında bir nokta (tepe noktası) alınsın. Taban ile tabanı bu tek nokta ile birleştiren üçgen yüzlerden oluşan cisme piramit denir.*




- *Tabanı ABCD dikdörtgeni ve tepe noktası T olan piramit (T, ABCD) şeklinde gösterilir.*
- *[AB], [BC], [CD] ve [DA] doğru parçaları piramidin taban ayrıtlarıdır.*
- *|TH| = h piramidin yüksekliğidir.*
- *Dik piramitlerin yüksekliği, tabanın ağırlık merkezinden geçer.*
- *Dik piramidin yan yüzleri olan $\widehat{TAB}$, $\widehat{TBC}$, $\widehat{TCD}$ ve $\widehat{TDA}$ ikizkenar üçgendir.*




- *Düzgün dik piramitlerde $|TK| = h_y$ yan yüzeyin yüksekliğidir.*
- *Piramitler taban şekline göre isimlendirilir: üçgen piramit, dörtgen piramit, kare piramit vb.*
- *Düzgün dik piramitlerde*

$$\text{Yanal Alan} = \frac{(\text{Taban Çevresi}) \cdot (\text{Yan Yüz Yüksekliği})}{2}$$ *'dir.*

- *Bütün dik piramitlerin alan ve hacimleri aynı şekilde hesaplanır.*

Yüzey Alanı = (Taban Alanı) + (Yanal Alan)

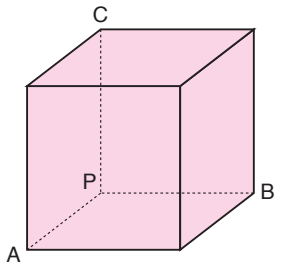
$$\text{Hacim} = \frac{(\text{Taban Alanı}) \cdot (\text{Yükseklik})}{3}$$

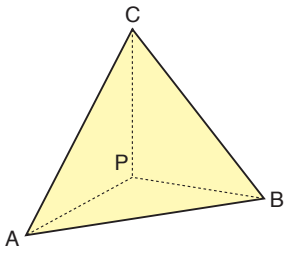
Taban Alanı = A(ABCD)

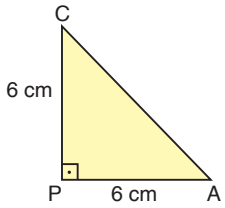
$$\text{Yanal Alan} = \frac{h_y \cdot a}{2} + \frac{h_y \cdot b}{2} + \frac{h_y \cdot c}{2} + \frac{h_y \cdot d}{2}$$

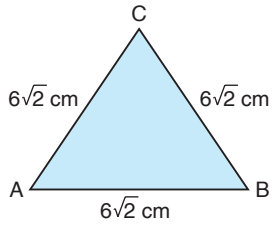
$$= (a + b + c + d)\,\frac{h_y}{2}$$

$$= (\text{Taban Çevresi}) \cdot \frac{h_y}{2}$$




## 8. Örnek

Yandaki küpün bir ayrıtı 6 cm uzunluğundadır.

**Bu küpün A, B ve C noktalarından geçen bir düzlem ile kesilmesiyle oluşacak piramidin yüzey alanını $cm^2$ cinsinden bulalım.**

### Çözüm

A, B ve C noktalarından geçen düzlem ile kesilen küp yandaki gibi bir piramit oluşturur. Piramidin [AP], [PB] ve [PC] ayrıtları küpün ayrıtlarına eş, [AC], [AB] ve [BC] ayrıtları da küpün yüzey köşegenlerine eştir. Bu durumda piramidin, dik kenarları küpün ayrıtı olan üç eş ikizkenar dik üçgen ve kenarları küpün yüzey köşegeni olan bir eşkenar üçgenden oluştuğu söylenebilir.

APC dik üçgeninin alanı $\frac{6 \cdot 6}{2} = 18\ cm^2$ dir.

Bu üçgene eş olan 3 tane yüz olduğundan bu yüzlerin alanları toplamı, $3 \cdot 18 = 54\ cm^2$ dir. **...(I)**

[AC]'nın uzunluğu APC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanarak $6\sqrt{2}$ cm bulunur.

Bir ayrıtı a olan eşkenar üçgenin alanı $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ olduğundan

$A(\widehat{ABC}) = \frac{(6\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = 18\sqrt{3}\ cm^2$ dir. **...(II)**

O hâlde piramidin yüzey alanı, **I** ve **II**'den $(54 + 18\sqrt{3})\ cm^2$ bulunur.

## 9. Örnek

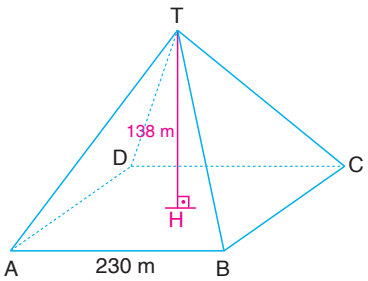
Keops Piramidi, Mısır'ın başkenti Kahire'de bulunan antik Gize Mezar Kenti'nde bulunan üç piramitten en eski ve en büyük olanıdır. Keops Piramidi tabanı dörtgen olan bir dik piramittir.

Keops Piramit'i, Kahire

**Buna göre Keops Piramidi'ni, taban ayrıt uzunluğu 230 m ve yüksekliği 138 m olan kare dik piramit kabul ederek bu piramidin hacmini $m^3$ cinsinden hesaplayalım.**

**Çözüm**

Piramidin tabanı ABCD karesi ve yüksekliği [TH] olsun.




Buna göre piramidin hacmi V ise,

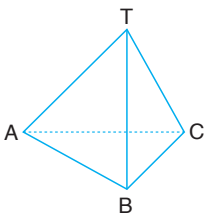
$$V = \frac{(\text{Taban Alanı}) \cdot (\text{Yükseklik})}{3}$$

$$= \frac{(230)^2 \cdot 138}{3}$$

$= 2\,433\,400\ m^3$ bulunur.

## Düzgün Dört yüzlü

*Dört yüzü birbirine eş ve eşkenar üçgen olan piramite düzgün dört yüzlü denir.*



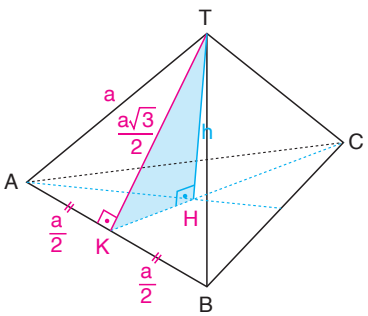

### 10. Örnek

**Bir ayrıtının uzunluğu a birim olan düzgün dört yüzlünün;**

**a. Yan yüz yüksekliğini,** **b. Cisim yüksekliğini,**

**c. Yüzey alanını,** **ç. Hacmini bulalım.**

**Çözüm**




**a.** $\widehat{ATB}$ bir kenar uzunluğu a br olan eşkenar üçgen olduğundan [TK]'nın uzunluğu,

$|TK| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ br bulunur.

**b.** Düzgün dört yüzlünün yüksekliği [TH]'dır.

H, ABC üçgeninin ağırlık merkezi olduğundan $|KH| = \frac{|KC|}{3}$'tür.

Buna göre,

$|KH| = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow |KH| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ br'dir.

THK dik üçgeninde Pisagor teoremine göre,

$$|TK|^2 = |TH|^2 + |KH|^2 \Rightarrow \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = |TH|^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

$$\Rightarrow |TH| = \frac{a\sqrt{6}}{3} \text{ br bulunur.}$$

**c.** Düzgün dört yüzlü birbirine eş dört eşkenar üçgenden oluşur.

Bu nedenle $A(\widehat{ABC}) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ olup

Yüzey Alanı $= 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$ br$^2$ olur.

**ç.** Piramitin hacmi V olmak üzere,

$$V = \frac{(\text{Taban Alanı}) \cdot \text{Yükseklik}}{3} \Rightarrow V = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}}{3}$$

$$\Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \text{ br}^3 \text{ tür.}$$

---

**12. Örnek**

**Hacmi $18\sqrt{2}$ br$^3$ olan bir düzgün dört yüzlünün yüzey alanının kaç birimkare olduğunu bulalım.**

**Çözüm**

Ayrıt uzunluğu a birim olan düzgün dört yüzlünün hacmi V ve yüzey alanı A olmak üzere,

$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ ve $A = a^2\sqrt{3}$ tür. Buna göre,

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a = 6 \text{ br bulunur.}$$

O hâlde,

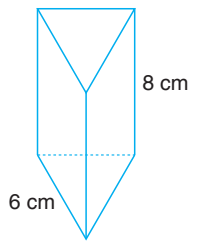
$A = a^2\sqrt{3} \Rightarrow A = 6^2\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$ br$^2$ olur.

---

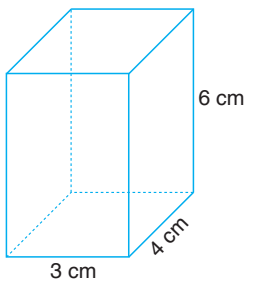
## 6.1.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** Aşağıdaki eşkenar üçgen dik prizma, dikdörtgenler prizması ve küpün yanal alanını, yüzey alanını cm$^2$ cinsinden, hacmini cm$^3$ cinsinden bulunuz.

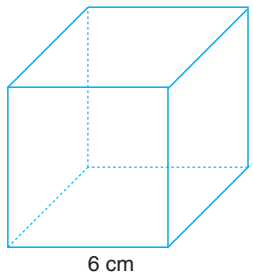
**a.**




**b.**




**c.**

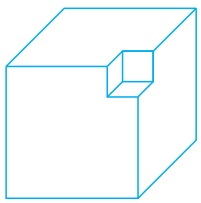


**2.** Bir ayrıtının uzunluğu 3 cm olan küpler yan yana ve üst üste yerleştirilerek bir ayrıtının uzunluğu 12 cm olan bir küp yapılacaktır. Buna göre kullanılacak küp sayısını bulunuz.

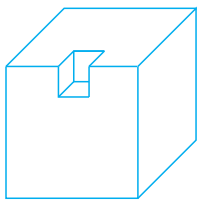
**3.** Bir ayrıtının uzunluğu 4 cm olan aşağıdaki küplerin çeşitli yerlerinden bir ayrıtının uzunluğu 1 cm olan küp çıkartılmıştır.

Buna göre kalan cisimlerin yüzey alanı ve hacimlerindeki değişimi açıklayınız.

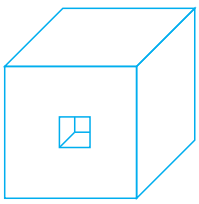
**a.**



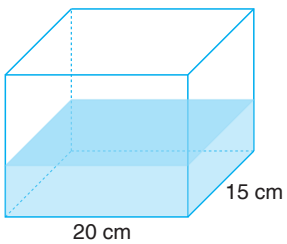
**b.**



**c.**

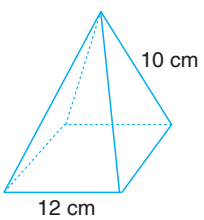


**4.** Yanda verilen dikdörtgenler prizması şeklindeki akvaryumun içine bir ayrıtının uzunluğu 2 cm olan üç tane küp atıldığında küpler suya batıyor. Buna göre akvaryum içindeki su kaç cm yükselir?

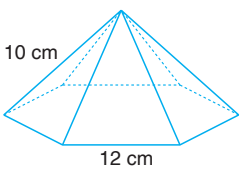



**5.** Aşağıdaki tabanları düzgün çokgen olan dik piramitlerin yanal alanlarını $cm^2$ cinsinden bulunuz.

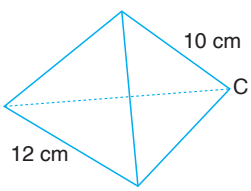
**a.**




**b.**

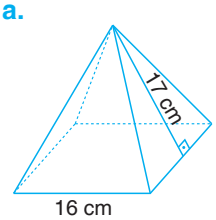



**c.**

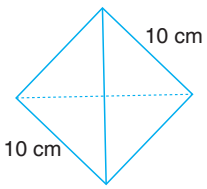



**6.** Aşağıdaki tabanları düzgün çokgen olan dik piramitlerin hacimlerini $cm^3$ cinsinden bulunuz.

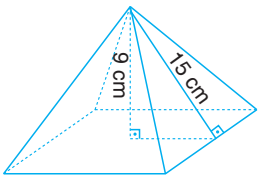
**a.**




**b.**

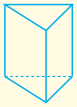



**c.**



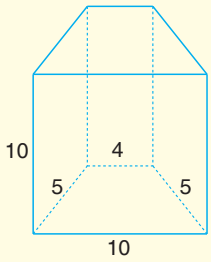
# 6.1 KONU DEĞERLENDİRME SORULARI

**1.** Aşağıdaki tabloda verilenlere göre tabloyu doldurunuz.

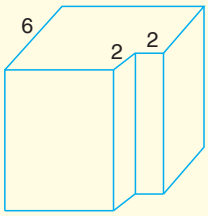
| Prizmanın Adı | Prizma | Prizmanın Açınımı |
|---|---|---|
| Küp | | |
| Üçgen Dik Prizma |  | |

**2.** Farklı yüzeylerinin alanları $12\ cm^2$, $20\ cm^2$ ve $15\ cm^2$ olan dikdörtgenler prizmasının hacmi kaç $cm^3$ tür?

**3.** Taban ayrıtlarının uzunlukları 5 cm, 4 cm, 5 cm ve 10 cm, yüksekliği 10 cm olan yandaki ikizkenar yamuk dik prizmanın yüzey alanı kaç $br^2$ dir?

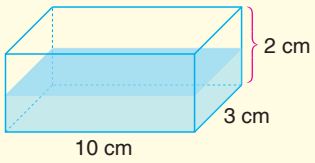



**4.** Bir ayrıtının uzunluğu 6 cm olan küp biçimindeki tahta bloktan yandaki gibi taban ayrıtının uzunluğu 2 cm olan kare dik prizma şeklinde bir parça kesilip çıkarılıyor.



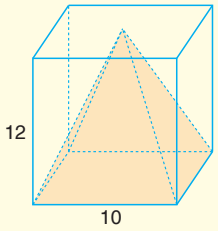

Buna göre tahta blokun yüzey alanı kaç $cm^2$ ve nasıl değişir?

**5.** Taban ayrıtlarının uzunluğu 10 cm ve 3 cm, yüksekliği 2 cm olan dikdörtgenler prizması yarısına kadar su ile doludur.




Bu prizma en küçük alanlı yüzeyi üzerine yatırılırsa suyun yüksekliği kaç cm olur?

**6.** Yanda taban ayrıtının uzunluğu 10 cm ve yüksekliği 12 cm olan kare dik prizma şeklindeki tahta blok verilmiştir. Tahta blok yontularak şekildeki gibi yüksekliği 12 cm olan kare dik piramit elde edilecektir.




Buna göre elde edilecek piramitin hacmi kaç $cm^3$ olur?

**7.** Yüzey alanı $36\sqrt{3}\ br^2$ olan düzgün dört yüzlünün hacmi kaç $br^3$ tür?

# 6. ALT ÖĞRENME ALANI TESTİ

**1.** **Taban çevresi 12 cm olan dik prizmanın yanal alanı 120 $cm^2$ olduğuna göre yüksekliği kaç cm'dir?**

A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 15

**2.** **Tabanının bir ayrıtı 8 cm ve yüksekliği 10 cm olan eşkenar üçgen dik prizmanın hacmi kaç $cm^3$ tür?**

A) $80\sqrt{3}$ B) $90\sqrt{3}$ C) $120\sqrt{3}$

D) $150\sqrt{3}$ E) $160\sqrt{3}$

**3.** **Tabanının alanı 100 $cm^2$ olan kare dik prizmanın yüksekliği 8 cm olduğuna göre yanal alanı kaç $cm^2$ dir?**

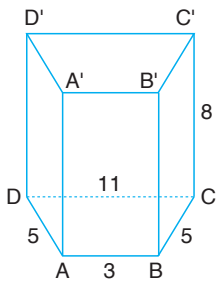
A) 300 B) 320 C) 340 D) 360 E) 360

**4.** $|AD| = |BC| = 5$ cm

$|AB| = 3$ cm

$|DC| = 11$ cm

$|CC'| = 8$ cm




**Yukarıdaki verilere göre ikizkenar yamuk dik prizmanın hacmi kaç $cm^3$ tür?**

A) 126 B) 147 C) 168 D) 189 E) 210

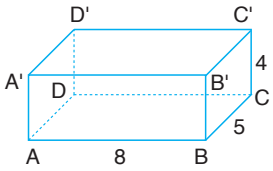
**5.** **Düzgün altıgen dik prizmanın yüksekliği 10 cm yanal alanı 240 $cm^2$ olduğuna göre taban ayrıtlarından birinin uzunluğu kaç cm'dir?**

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

**6.** $|AB| = 8$ cm

$|BC| = 5$ cm

$|CC'| = 4$ cm




**Yukarıdaki verilere göre dikdörtgenler prizmasının yüzey alanı kaç $cm^2$ dir?**

A) 184 B) 196 C) 208 D) 210 E) 232

**7.** Bir dikdörtgenler prizmasının boyutları arasında $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{12}$ şeklinde bir bağıntı vardır.

**Prizmanın hacmi 240 $cm^3$ olduğuna göre alanı kaç $cm^2$ dir?**

A) 20 B) 24 C) 30 D) 36 E) 40

**8.** Bir dikdörtgenler prizmasının ayrıtları 2, 3 ve 4 sayılarıyla orantılıdır.

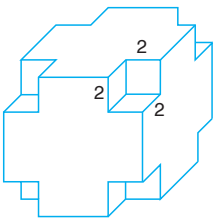
**Prizmanın hacmi 192 $cm^3$ olduğuna göre bu prizmanın yüzey alanı kaç $cm^2$ dir?**

A) 104 B) 152 C) 176 D) 208 E) 232

**9.** **Alanı 384 $cm^2$ olan küpün hacmi kaç $cm^3$ tür?**

A) 64 B) 125 C) 216 D) 341 E) 512

**10.**

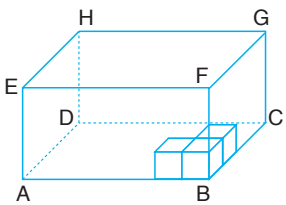



Bir ayrıtı 8 cm olan bir küpün bütün köşelerinden bir kenarı 2 cm olan küp çıkarılıyor.

**Buna göre kalan cismin hacmi kaç $cm^3$ tür?**

A) 448 B) 500 C) 504 D) 512 E) 586

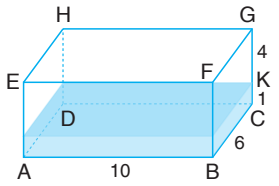
**11.** |AB| = 8 cm
|BC| = 6 cm
|GC| = 5 cm




**Yukarıdaki dikdörtgenler prizmasının içerisine bir ayrıtı 2 cm olan küplerden en çok kaç tane yerleştirilebilir?**

A) 24 B) 30 C) 40 D) 48 E) 72

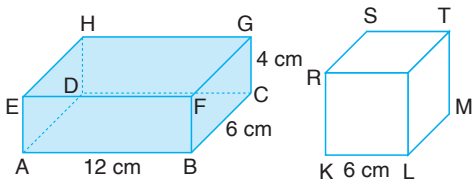
**12.** |AB| = 10 cm
|BC| = 6 cm
|KC| = 1 cm
|KG| = 4 cm




**Yukarıdaki verilere göre şekildeki dikdörtgenler prizması BCGF yüzeyi üzerine yatırılırsa içindeki suyun yüksekliği kaç cm olur?**

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

**13.**

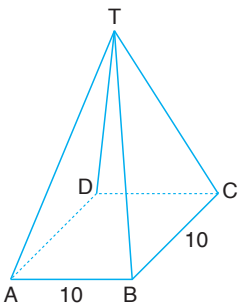



Yukarıda içi su ile dolu dikdörtgenler prizması ile içi boş küp verilmiştir.

**Dikdörtgenler prizmasındaki su, küpe boşaltıldığında taşan su miktarı kaç $cm^3$ tür?**

A) 18 B) 36 C) 54 D) 72 E) 90

**14.** **Bir taban ayrıtının uzunluğu 10 br olan kare dik piramidin yüksekliği 12 br ise yan yüzey yüksekliği kaç br'dir?**

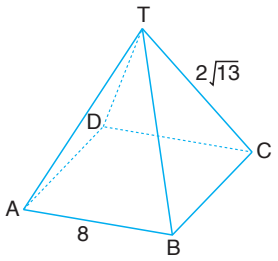



A) 17 B) 15 C) 13 D) 12 E) 10

**15.** (T, ABCD) kare dik piramit

$|AB| = 8$ cm

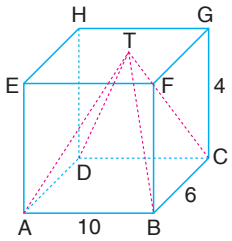
$|TC| = 2\sqrt{13}$ cm




**Yukarıdaki verilere göre piramidin yanal alanı kaç $cm^2$ dir?**

A) 64 B) 72 C) 96 D) 102 E) 144

**16.** Ayrıt uzunlukları 10 cm, 6 cm ve 4 cm olan şekildeki dikdörtgenler prizmasının içine (T, ABCD) piramidi yerleştirilmiştir.




**Yukarıdaki verilere göre piramidin hacmi kaç $cm^3$ tür?**

A) 50 B) 60 C) 70 D) 80 E) 90

**17.** **Alanı $36\sqrt{3}$ $br^2$ olan düzgün dört yüzlünün bir ayrıtının uzunluğu kaç br'dir?**

A) $4\sqrt{3}$ B) 6 C) $4\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{6}$

**18.** **Yüksekliği $4\sqrt{6}$ br olan düzgün dört yüzlünün hacmi kaç $br^3$ tür?**

A) $96\sqrt{2}$ B) $108\sqrt{2}$ C) $132\sqrt{2}$

D) $144\sqrt{2}$ E) $156\sqrt{2}$

**19.** Bir kenarının uzunluğu 12 cm olan eşkenar üçgen şeklindeki plaka köşelerinden kıvrılarak düzgün dört yüzlü elde edilmiştir.

**Oluşturulan cismin yanal alanı kaç $cm^2$ dir?**

A) $18\sqrt{3}$ B) $21\sqrt{3}$ C) $24\sqrt{3}$

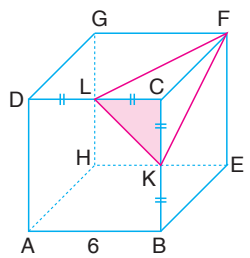
D) $27\sqrt{3}$ E) $36\sqrt{3}$

**20.** $|AB| = 6$ cm

$|DL| = |LC|$

$|BK| = |KC|$

Şekildeki küpten dik üçgen piramit kesilip çıkarılıyor.




**Yukarıdaki verilere göre kalan cismin hacmi kaç $cm^3$ tür?**

A) 210 B) 207 C) 205 D) 195 E) 172

## A

**ağırlık merkezi:** Üçgende kenarortayların kesim noktası.

**akışkan:** Akış özellikleri gözlenebilen (sıvı veya gaz).

**anıt:** Önemli bir olayın veya büyük bir kişinin gelecek kuşaklarca tarih boyunca anılması için yapılan, göze çarpacak büyüklükte, sembol niteliğinde yapı, abide.

**anıtsal:** Anıt niteliğinde olan, anıta benzeyen.

**antik:** İlk Çağdaki uygarlıklarla, özellikle eski Yunan ve Roma uygarlıkları ile ilgili olan.

## B – C

**borsa:** Bazı tüccarların ve özellikle sarraflarla değerli kâğıt ve tahvil alışverişiyle uğraşanların alım satım ve değişim amacıyla devlet denetimi altında iş yaptıkları yer.

**cebir:** Artı ve eksi gerçek sayılarla, bunların yerini tutan harfler yardımıyla nicelikler arasında genel bağlantılar kuran matematik kolu.

## D – E – F

**dağılım:** Bir toplumda, bir kümede incelenen bir veya birçok özelliğin zamana, yere, seçilen herhangi bir değişkene göre hesaplanan sayısal ve oransal dağılışı.

**değişken:** Cebirde bir denklemin katsayılarına giren değişken nicelik, parametre.

**editör:** Yazıları yeniden düzenleyerek yayıma hazırlayan kimse.

**ekolog:** Ekolojiyle uğraşan kimse, ekoloji uzmanı.

**ekoloji:** Canlıların hem kendi aralarındaki hem de çevreleriyle olan ilişkilerini tek tek veya birlikte inceleyen bilim dalı.

**fon:** Belirli bir iş için gerektikçe harcanmak üzere ayrılıp işletilen para, kaynak.

## H – İ

**hazine bonosu:** Maliyenin her yıl bütçe kanunu ile aldığı yetkiye dayanarak aynı kanunla belirlenen sınırı aşmamak üzere çıkardığı ve bankalara iskonto ettirdiği en çok bir yıl vadeli borç senedi.

**hidrolik:** Su ile ilgili.

**ivme:** Hareket eden nesnenin kısa bir zaman içinde, hızında oluşan değişmenin bu zamana oranı.

## K – M

**kongre:** Çeşitli ülkelerden yöneticilerin, elçilerin, delegelerin katılmasıyla yapılan toplantı.

**melez:** Değişik türden hayvan veya bitkiden üremiş (hayvan veya bitki), kırma.

**mitoloji:** Bir ulusa, bir dine, özellikle Yunan, Latin uygarlığına ait mitlerin, efsanelerin bütünü.

## O – Ö

**odak:** Bir ışık veya ısı kaynağından yayılan ışınların toplandığı yer.

**orta dikme:** Bir doğru parçasının uç noktalarından eşit uzaklıkta bulunan noktalar kümesi.

**öteleme:** Bir noktanın belirli bir uzaklık, yön ve doğrultuda farklı bir noktaya taşınması.

**özdeşlik:** İki yanı birbirinin aynı olan veya harflerle verilen sayısal değerler ne olursa olsun iki yanı da sayıca eşit değerler alan eşitlik.

## P – S

**parabol:** Bir düzlemin odak denen sabit bir noktadan ve doğrultman denen sabit bir doğrudan eşit uzaklıktaki noktalarının geometrik yeri.

**paraboloit:** Odağı olmayan, yalnız bir simetri ekseni bulunan ikinci dereceden yüzey.

**platform:** Yüksekçe yer.

**sermaye:** Varlık, servet.

**sivil:** Askerî olmayan.

## T – Y

**tam pansiyon:** Konaklama tesislerinde oda, kahvaltı, öğle ve akşam yemekleri gibi hizmetlerin tamamının verildiği sistem.

**temel bilimler:** Değişik bilim alanlarının fizik, kimya, biyoloji, matematik gibi temel bilgilerini içeren bilim dalları.

**teşvik:** İsteklendirme, özendirme.

**yansıma:** Bir nokta ya da doğruya göre simetri.

**yörünge:** Bir gök cisminin hareketi süresince izlediği yol.

# 1. ALT ÖĞRENME ALANI

## 1. Alt Öğrenme Alanı için Hazırlık Soruları

**1.** a. $\frac{2}{3}$ b. $\frac{3}{10}$ c. $\frac{35}{54}$ ç. $\frac{1}{4}$

**2.** a. $\frac{7}{3}$ b. $\frac{9}{8}$ **3.** 210

**4.** a. 4 b. 4 c. 6 ç. 6

**5.** a. 0 b. $-2, 2$ c. 2
ç. $-5, -1$ d. $-1$ e. $-5, -1$

**6.** a. $\frac{1}{x}$ b. $125x^6$ c. $-\frac{8x^{11}}{27}$ ç. $-\frac{72}{x^4}$

**7.** a. Y b. D c. Y ç. Y

## KONU 1.1

### 1.1.1 Kritik Düşünme

a. $\binom{10}{2} = 45$

b. $\binom{150}{2} = 11175$

### 1.1.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** a. 290 350 b. 1 251 922

**2.** 60

**3.** a. 20 b. 400 c. 240

**4.** 20

**5.** a. $5^4$ b. 120 c. 320

**6.** a. $6^4$ b. 360 c. 432 ç. 120

**7.** 40

### 1.1.2 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** 120

**2.** $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$, $8! = 40320$, $9! = 362880$, $10! = 3628800$

**3.** a. 7 b. 72 c. $\frac{1}{6}$
ç. 100 d. $n^2 - n$ e. $n^2 + n$
f. 84 g. $\frac{n}{(n-3)!}$

**4.** a. $7.5!$ b. $7.7!$ c. $719.7!$
ç. $81.7!$ d. $47.5!$ e. $15.8!$

**5.** a. $11!$ b. 9 c. $\frac{47}{7}$
ç. $n + 1$ d. $(n + 1)!$ e. $n^2 + n$

### 1.1.3 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** a. 1, 2, 3, 4

b. 12, 21, 13, 31, 14, 41, 23, 32, 24, 42, 34, 43

c. 123, 132, 213, 231, 312, 321, 134, 143, 314, 341, 413, 431, 234, 243, 324, 342, 432, 423, 124, 142, 214, 241, 412, 421

ç. 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321

**2.** a. 4 b. 5 c. 6 ç. 720
d. 42 e. 336 f. 5

**3.** a. 5 b. 8

**4.** a. 60 b. 60 c. 36 ç. 96

**5.** a. $9!$ b. $P(9, 4) = 3024$ c. $6!.4!$
ç. $5!.P(6, 4)$ d. $9! - 8!.2!$

### 1.1.1 Konu Değerlendirme Soruları

**1.** 320 **2.** 210

**3.** a. 4 b. 9 c. 8

**4.** a. $4^3$ b. 24

**5.** $2^{20}$ **6.** $5^{10}$

**7.** a. 24 b. 576 c. 144

**8.** a. 4 b. 8 c. 24

**9.** 56 **10.** 6 **11.** 15

**12.** a. 180 b. 100 c. 90
ç. 52 d. 60 e. 36

**13.** 200 **14.** 5123 **15.** 19980

**16.** 11979900

**17.** a. 2 b. 72 c. $\frac{1}{3}$
ç. 2 d. 90 e. 7
f. $\frac{73}{71}$ g. 6 ğ. $\frac{1}{4}$
h. $n + 2$ ı. $\frac{n+1}{n^2}$ i. $\frac{(n+1)^2}{n}$
j. $\frac{n-2}{n^2-1}$ k. $\frac{1}{2.(n+1).(2n-1)}$

**18.** I ⟷ b, II ⟷ c, III ⟷ a, IV ⟷ ç

**19.** 303600

**20.** a. $6! = 720$ b. $P(8, 3) = 336$

**21.** a. Y b. Y c. D ç. D

**22.** I ⟷ b, II ⟷ ç, III ⟷ d, IV ⟷ c, V ⟷ a

**23.** C **24.** 120 **25.** $14!.2!$

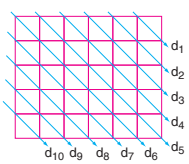
**26.** a. $7!$ b. $5!.3!$ c. $2!.3!.4!$
ç. $4!.P(5, 3)$ d. $4!.3!$

**27.** $7!.P(8, 4)$ **28.** $(5!)^2.2!$

**29.** a. D b. D c. Y

### 1.1.2 Kritik Düşünme

70 kare vardır.




Köşelerden geçen birbirine paralel 10 paralel doğru vardır. Her bir doğru üzerindeki köşelerden herhangi ikisi bir kare belirtir. Örneğin $d_5$ üzerindeki 6 köşe, $\binom{6}{2} = 15$ kare belirtir.

O hâlde şekildeki tüm karelerin sayısı,
$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+\binom{6}{2}+\binom{5}{2}+\binom{4}{2}+\binom{3}{2}+\binom{2}{2} = 70$ tanedir.

### 1.1.4 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** a. 10080 b. 360 c. 1800

**2.** 60

**3.** a. 210 b. 150

**4.** 108

**5.** a. 126 b. 60 c. 90

### 1.1.5 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** **a.** 1 **b.** 1 **c.** 12 **ç.** 55 **d.** 84

**2.** **a.** 3 **b.** 9

**3.** **a.** 1820 **b.** 91

**4.** **a.** 15 **b.** 20 **c.** 5 **ç.** 25

**5.** **a.** 60 **b.** 100

**6.** $\binom{4}{3}\cdot\binom{3}{2}.5!$

**7.** $\binom{4}{1}\cdot\binom{5}{4}+\binom{5}{5}=21$

**8.** **a.** $\binom{9}{5}\cdot\binom{4}{4}$

**b.** $\binom{7}{5}\cdot\binom{2}{2}+\binom{7}{4}\cdot\binom{3}{3}+\binom{7}{3}\cdot\binom{4}{4}$

**c.** $\binom{2}{1}\cdot\binom{5}{3}\cdot\binom{2}{2}+\binom{2}{1}\cdot\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{3}$

**9.** 36 **10.** 30 **11.** 462

**12.** **a.** 247 **b.** 219

### 1.1.6 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** **a.** $9x^2+6x+1$

**b.** $8x^6-60x^4y+150x^2y^2-125y^3$

**c.** $\frac{16}{x^4}-96.\frac{y^2}{x^2}+216y^4-216x^2y^6+81x^4y^8$

**2.** **a.** $\binom{13}{5}2^8 3^5 x^8$ **b.** $\binom{10}{3}5^3 x^{11}$

**c.** $-\binom{15}{9}2^9\frac{1}{x^3}$

**3.** **a.** 40095 **b.** $-5940$

**4.** 114

**5.** **a.** $-280$ **b.** Sabit terimi yoktur.

**6.** 21

### 1.1.2 Konu Değerlendirme Soruları

**1.** **a.** D **b.** Y **c.** Y **ç.** D

**2.** I ⟷ c, II ⟷ ç, III ⟷ a, IV ⟷ b

**4.** **a.** 8 **b.** 6 **c.** 4 **ç.** 5

**5.** $\binom{8}{3}\cdot\binom{10}{4}$

**6.** 78 **7.** 7 **8.** 210 **9.** 28 **10.** 360

**11.** 28 **12.** 495

**13.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 165 | 330 | 462 | 462 |
| 495 | 792 | 924 | |
| 1287 | 1716 | | |
| 3003 | | | |

**14.** **a.** n + 1, n **b.** 8 **c.** 8

**15.** $27x^3+135x^2+225x+125$

**16.** I ⟷ b, II ⟷ c, III ⟷ a

**17.** **a.** $\binom{30}{6}2^6 r^{60}$

**b.** $\binom{30}{18}2^{18}$

**18.** E

## KONU 1.2

### 1.2.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** {(Y, Y), (Y, T), (T, Y), (T, T)}

**2.** **a.** {1, 3, 5} **b.** {1, 2}

**c.** {1, 2, 3, 4, 5, 6}, kesin olaydır.

**ç.** ∅, imkansız olaydır.

**3.** A : Çekilen topun 1 olması

B : Çekilen topun 2 olması

C : Çekilen topun 3 olması

D : Çekilen topun 4 olması

E : Çekilen topun 5 olması

s(A) = 5, s(B) = 4, s(C) = 3,

s(D) = 2 ve s(E) = 1 olduğundan A, B, C, D ve E eş olasılı olmayan olaylardır.

**4.** A : Çift numaralı bilye gelmesi

B : Asal numaralı bilye gelmesi

A = {4, 6, 8} ve B = {3, 5, 7} dir.

$A \cap B = \varnothing$ ve $A \cup B = E$ olduğundan A ve B tümleyen olaylardır.

**5.** A = {0, 1, 4, 6, 8, 9}

B = {0, 2, 4, 6, 8}

C = {0, 5}

D = {2, 3, 5, 7}

A ile D ayrık ve tümleyen olaylardır.

A ile B, A ile C, B ile C, B ile D, C ile D ayrık olmayan olaylardır.

### 1.2.2 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** $\frac{1}{2}$ **2.** $\frac{5}{6}$ **3.** **a.** 1 **b.** 0

**4.** Kazanma olasılığı $\frac{1}{7}$, kazanmama olasılığı $\frac{6}{7}$

**5.** **a.** $\frac{1}{9}$ **b.** $\frac{5}{6}$ **6.** $\frac{3}{8}$ **7.** $\frac{5}{23}$

**8.** $P(A)=\frac{1}{3}$ $P(B')=\frac{1}{5}$

A ve B ayrık olmayan olaylardır.

**9.** $\frac{7}{24}$

### 1.2 Konu Değerlendirme Soruları

**1.** **a.** E = {(Y, Y), (Y, T), (T, Y), (T, T)}
A = {(Y, Y), (Y, T), (T, Y)}

**b.** E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
B = {5}

**c.** E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
C = E

**ç.** E = {(1, 1), (1,2), ..., (6, 5), (6, 6)}
D = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)(4, 4), (5, 5), (6, 6)}

**2.** **a.** kesin / imkânsız

**b.** eş olasılı

**c.** ayrık olaylar

**ç.** tümleyen

**3.** **a.** Y **b.** Y **c.** D

**4.** $\frac{7}{8}$ **5.** $\frac{3}{19}$

**6.** Kazanma olasılığı $\frac{14}{91}$, kazanamama olasılığı $\frac{77}{91}$

**7.** $\frac{1}{4}$ **8.** $\frac{4}{15}$ **9.** $\frac{3}{4}$

**10.** Öğrenci yorumuna bağlıdır.

### 1. Alt Öğrenme Alanı Testi

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1.** D | **2.** C | **3.** A | **4.** B | **5.** B |
| **6.** C | **7.** E | **8.** C | **9.** B | **10.** C |
| **11.** D | **12.** A | **13.** E | **14.** D | **15.** A |
| **16.** A | **17.** B | **18.** C | **19.** D | **20.** C |
| **21.** C | **22.** E | **23.** E | **24.** D | **25.** B |
| **26.** C | **27.** C | **28.** C | **29.** E | **30.** D |

## 2. ALT ÖĞRENME ALANI

### 2. Alt Öğrenme Alanı için Hazırlık Soruları

**1. a.** $2x + 3$ **b.** $x^2 - 1$
**c.** $5 - x$ **ç.** $-x^2$

**2. a.** $\frac{y+5}{2}$ **b.** $\frac{3y-4}{3}$
**c.** $\frac{4y+3}{2-y}$ **ç.** $\frac{2y+4}{y+3}$

**3. a.** $x^2 - x - 6$ **b.** $x^3 + x^2 - 4x - 4$
**c.** $x^2 - 4x + 5$

**4. a.** $A \times B = \{(0, 0), (0, 2), (1, 0), (1, 2)\}$
**b.** $A = \{0, 1\}$ , $B = \{1, 2, 3\}$

**6.** I, IV, V

## KONU 2.1

### 2.1.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1. a.** $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$
$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

**b.** $f = \{(a_1, 1), (a_2, 2), (a_3, 3), (a_4, 4), (a_5, 3)\}$

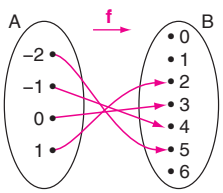
**c.** f bir fonksiyondur.
Tanım kümesi A, değer kümesi B, görüntü kümesi $f(A) = \{1, 2, 3, 4\}$ tür.

**2. c.** $\{y, z, k\}$ **ç.** $\{k, z, t, y\}$ **e.** $\{x\}$

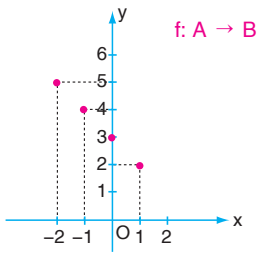
**3. a.** $f = \{(-2, 5), (-1, 4), (0, 3), (1, 2)\}$

**b.** $f(A) = \{2, 3, 4, 5\}$

**c.**




**ç.**




### 2.1.2 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1. a.** $-5$ **b.** 4 **c.** 10 **ç.** 0 **d.** $-1$
**e.** 0 **f.** 10 **g.** $1 - 3a$ **ğ.** $\frac{x}{x+1}$
**h.** $|9x^2 - 3x| - 2$

**2. a.** 2 **b.** 8 / 5 **c.** 10/3

**3. a.** $\mathbb{R}$ **b.** $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ **c.** $\mathbb{R} - \{0, 1\}$
**ç.** $\mathbb{R}$ **d.** $\mathbb{R} - \{0, 4\}$ **e.** $[-2, \infty) - \{1\}$
**f.** $[2, \infty)$ **g.** $(-\infty, -2] \cup [1, \infty)$
**ğ.** $[1, \infty)$

**4. a.** $f(x) = (30 + x).(200 - 4x)$ **b.** $[0, 50]$

**5.** $-5$

### 2.1.1 Kritik Düşünme

**1. a.** 5

**2.** a herhangi bir gerçek sayı olabilir.

### 2.1.3 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** A kümesinin her elemanının görüntüsü yine kendisine eşit olduğundan f birim fonksiyondur.

**2.** 5 **3.** 6 **4.** $y = 4x - 1$

**5.** $f(x) = 2x + 5$

**6.** $f(A) = g(A) = \{2, 5\}$ ve f= g dir.

**7.** $-1$

**8. a.** Çift fonksiyon
**b.** Tek fonksiyon
**c.** Tek fonksiyon
**ç.** Ne tek, ne çift fonksiyon

**9.** 10

### 2.1.4 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.**

| | Bire Bir | Örten | İçine |
|---|---|---|---|
| f | ✓ | ✓ | ✗ |
| g | ✗ | ✗ | ✓ |
| h | ✗ | ✓ | ✗ |
| k | ✓ | ✗ | ✓ |
| ℓ | ✓ | ✗ | ✓ |
| m | ✓ | ✓ | ✗ |

**2. a. i.** $x^2$ $(x \neq -1)$
**ii.** $1/(x^2 + x)^2$ $(x \neq -1)$

**b. i.** 1 **ii.** $-\frac{3}{2}$ **iii.** 9 **iv.** 10

### 2.1.1 Konu Değerlendirme Soruları

**1.** a ve ç

**2. a.** $f(A) = \{a, b, c, d\}$
**ç.** $f(A) = \{\ell, n, p\}$

**3. a.** $f(A) = \{-2, -1, 0, 7, 26\}$
**b.** $f = \{(-1, -2), (0, -1), (1, 0), (2, 7), (3, 26)\}$

**4.** Tanım Kümesi = $\{a, b, c, 1, 3\}$
Görüntü Kümesi = $\{1, 2, 3, b\}$

**5. a.** $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$
**b.** $\{-1/2, 0, 1/2, 1, 3/2\}$
**c.** $\{-5, -3, -1, 1, 3\}$
**ç.** $\{-5, -2, 1, 4, 7\}$
**d.** $\{-3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2\}$
**e.** $\{-7, -5/7, -2/5, 1/3, 4\}$

**6.** Öğrenci yorumuna bağlı

**7.** $-1, 2/3, 2, 4$ **8.** $-1/5, -3/5, 1, -3$

**9.** 7, 28/9, 4, 52

**10.** 2/7, 9/14, 1/2, 98/151

**11.** Yok, Yok, $\sqrt{6}$, $\sqrt{5\sqrt{11}+1}$

**12.** 6, 13/3, 3, 6

**13.** $-2/3a$, $2a/3$, $2/3\sqrt{a}$, $2/3a^2$

**14.** $a^2 + 4$, $\frac{1}{a^2} + 4$, $a + 4$, $a^4 + 4$

**15.** $1/(a^2 + 4)$, $a^2/(4a^2 + 1)$, $1/(a + 4)$, $1/(a^4 + 4)$

**16.** $\sqrt{2+a^2+a^4}$, $\sqrt{2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^4}}$, $\sqrt{2+a+a^2}$, $\sqrt{2+a^4+a^8}$

**17.** **a.** $\{1\}$ **b.** $\{-1/5\}$ **c.** $\{-3, 3\}$
**ç.** $\{2\}$ **d.** $\{100\}$ **e.** $\{-3, 3\}$

**18.** **a.** $\mathbb{R}$ **b.** $\mathbb{R}$
**c.** $\mathbb{R}$ **ç.** $[0, +\infty)$
**d.** $[-7/2, +\infty)$ **e.** $\mathbb{R}$
**f.** $(-\infty, 1/3]$ **g.** $\mathbb{R} - \{-2\}$
**ğ.** $\mathbb{R} - \{5\}$ **h.** $(-\infty, 5)$
**ı.** $\mathbb{R}$ **i.** $(-3, 3)$
**j.** $(-\infty, -5] \cup [1, +\infty)$ **k.** $\mathbb{R} - \{-5, 1\}$

**19.** $-1$ **20.** **c.** $P(t) = t^2$

**22.** **a.** $f(x) = (40 - 2x)^2 . x$ **b.** 4500

**23.** 13 **24.** **a.** $f(x) = \frac{x}{2} + 4$

**b.** $A = (1, 30)$, $f(A) = \left(\frac{9}{2}, 19\right)$ **c.** 12

**25.** $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

**26.** $f(-1) = f(0) = f(1)$ olduğundan f sabit fonksiyondur.

**27.** 2 **28.** 1

**29.** **a.** $f(x) = 2{,}4x + 2{,}7$ **b.** 60,30 **c.** 30

**30.** $-2$

**31.** $f(A) = g(A) = \{-1, -2\}$, $f(0) = g(0)$ ve $f(1) = g(1)$ olduğundan $f = g$ dir.

**32.** **a.** Çift **b.** Tek **c.** Çift
**ç.** Çift **d.** Çift **e.** Ne tek ne çift

**33.** 7/5

### 2.1.5 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** **a.** Tanım Kümesi = $\mathbb{R} - \{0\}$
Görüntü Kümesi = $\mathbb{R}^+$

**b.** Tanım Kümesi = $\mathbb{R} - \{-2\}$
Görüntü Kümesi = $(-\infty, 0] \cup \{1\}$

**c.** Tanım Kümesi = $[0, 4]$
Görüntü Kümesi = $\{0, 2\}$

**ç.** Tanım Kümesi = $\mathbb{R}$
Görüntü Kümesi = $[0, \infty)$

**2.** **a.** $f = \{(1{,}012 ; 4), (1{,}008 ; 5), (0, 996 ; 11), (0{,}994 ; 9), (0{,}996 ; 7), (1 ; 4), (1{,}008 ; 1), (1, 011 ; -2), (1{,}019 ; -4)\}$

**b.** Fonksiyon değildir.

**3.** $\beta$ ve $\theta$ fonksiyondur.

### 2.1.6 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** **a.** **i.** 2 **ii.** 2 **iii.** $-2$
**iv.** 1 **v.** 0 **vi.** 2

**b.** $\{-4, 1\}$ **c.** $\{-3, -2, 3\}$ **ç.** 4

**2.** **a.** $-5$ **b.** 4 **c.** 1 **ç.** 1 **d.** 0 **e.** 1

**3.** **a.** $-5$ **b.** $[0, 2) \cup \{-2\}$
**c.** $[-4, -3] \cup [-2, -1) \cup (-1, 3]$

**4.** **a.** $\{-1, 0, 1, 2\}$ **b.** $\varnothing$ **c.** $[0, 1)$

### 2.1.7 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** **i.** **a.** 3, (0, 2) **b.** 4, (0, $-3$)
**c.** $-2$, (0, 3) **ç.** $\frac{1}{2}$, (0, 1)
**d.** $-\frac{2}{3}$, (0, 4) **e.** 0, (0, 2)

**2.** **a.** Doğrusal fonksiyondur.
**b.** Doğrusal fonksiyon değildir.
**c.** Doğrusal fonksiyondur.
**ç.** Doğrusal fonksiyon değildir.

**3.** **a.** $f_A(x) = -10x + 70$, $f_B(x) = -5x + 55$

**b.** $m_A = -10$ L/sa.tir. Yani geçen her 1 saatlik sürede araçtaki benzin miktarı 10 L azalır.
$m_B = -5$ L/sa.tir. Yani geçen her 1 saatlik sürede araçtaki benzin miktarı 5 L azalır.

**c.** 3

### 2.1.8 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**2.** **a.**
$$f(x) = \begin{cases} x/100, & 0 < x < 50 \text{ ise} \\ 1{,}5x/100, & 50 \le x < 250 \text{ ise} \\ 2 + 2x/100, & x \ge 250 \text{ ise} \end{cases}$$

**b.** Tanım kümesi: $(0, \infty)$, görüntü kümesi: $(0 ; 0{,}5) \cup [0{,}75 ; 3{,}75) \cup [7, \infty)$

**ç.** 11 TL

### 2.1.2 Konu Değerlendirme Soruları

**1.** **a.** dikey – bir **b.** $f(2) = -4$ **c.** $f(x) = 0$

**2.** **a.** Y **b.** Y **c.** D

**3.** Evet, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ ve $f : A \to B$ olmak üzere $f = \{(1, 2)\}$

**4.** **a.** **i.** $-3$ **ii.** 0 **iii.** 3
**iv.** 5 **v.** 3 **vi.** $-2$
**b.** $[-7, 12]$ **c.** $[-4, 5]$
**ç.** $\{-3, 8, 12\}$ **d.** 2 **e.** 3
**f.** **i.** $-6$ **ii.** $-7$ **iii.** 3

**5.** **a.** $-5/2$ **b.** 0 **c.** 1 **ç.** 1
**d.** $-1$ **e.** $-3$ **f.** 1/2 **g.** $-1$
**ğ.** $\left[-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right]$ **h.** $[-1, 2]$

**6.** **a.** $F(x) = 0{,}15x + 0{,}5$ **b.** 5 TL
**ç.** y eksenini kestiği nokta (0 ; 0,5) olup bunun anlamı basım için sabit giderlerin 0,5 TL olduğudur. Grafiğinin eğimi $m = 0{,}15$ olup bunun anlamı her bir ilave sayfanın mal oluş fiyatının 0,15 TL olduğudur.

**8.** **a.**
$$k(t) = \begin{cases} 90t, & 0 \le t < 1 \text{ ise} \\ 90, & 1 \le t < 1{,}5 \text{ ise} \\ 90(t - 0{,}5), & 1{,}5 \le t < 2{,}5 \text{ ise} \end{cases}$$

**b.**
$$k(t) = \begin{cases} 90t, & 0 \le t < 0{,}5 \text{ ise} \\ 90 - 90t, & 0{,}5 \le t < 1 \text{ ise} \\ 90(t - 1), & 1 \le t \le 3 \text{ ise} \end{cases}$$

**9.** **a.**
$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x, & -2 \le x < 0 \text{ ise} \\ 2x, & 0 \le x \le 1 \text{ ise} \end{cases}$$

**b.**
$$\begin{cases} 1, & -2 \le x < 0 \text{ ise} \\ -x, & 0 \le x \le 1 \text{ ise} \end{cases}$$

**c.**
$$\begin{cases} 2 + x, & -2 \le x < 0 \text{ ise} \\ x, & x \ge 0 \text{ ise} \end{cases}$$

**ç.**
$$\begin{cases} -2x, & x < 0 \text{ ise} \\ 2 - 2x, & x \ge 0 \text{ ise} \end{cases}$$

## KONU 2.2

### 2.2.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** **a.** içine **b.** örten **c.** içine **ç.** 1 – 1, içine

**2.** **a.** 1 – 1, örten **b.** 1 – 1, örten
**c.** 1 – 1, içine **ç.** 1 – 1 değil, içine
**d.** 1 – 1 değil, içine **e.** 1 – 1 değil, içine
**f.** 1 – 1 değil, içine **g.** 1 – 1 değil, içine
**ğ.** 1 – 1, örten **h.** 1 – 1, içine
**ı.** 1 – 1 değil, içine **i.** 1 – 1, içine

### 2.2.2 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** **a.** $2x+1$ **b.** $2x+5$ **c.** $x+8$ **ç.** $4x-9$

**2.** **a.** $(x-1)^2$ **b.** $(x+1)^2-2$
**c.** $(x-2)^2+1$ **ç.** $(x-1)^2$

**3.** **a.** 4 **b.** 49 **c.** $4x+5$
**ç.** $12x-3$ **d.** 57 **e.** 61

**4.** **a.** $2x^2-1$ **b.** 8 **c.** 10

**5.** **a.** 5 **b.** $-2$ **c.** 0 **ç.** 5

### 2.2.1 Kritik Düşünme

$f(x)=x^2$ nin grafiğinin $y=x$ doğrusuna göre simetriği $f(x)$ in ters fonksiyonunun grafiği değildir. Çünkü $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ tanımlı olduğu bölgede bire bir ve örten olmadığından tersi fonksiyon değildir.

### 2.2.3 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** $f=\{(-2,-6),(-1,-3),(0,0),(1,3),(2,6)\}$

$f^{-1}=\{(-6,-2),(-3,-1),(0,0),(3,1),(6,2)\}$

**2.** **a.** $\frac{x}{2}$ **b.** $\frac{x+3}{5}$ **c.** $\frac{3x-4}{2}$

**3.** **a.** $\frac{2x+1}{x-3}$ **b.** $-\frac{3x}{x+2}$ **c.** $\frac{5x+3}{2x}$

**4.** **a.** $\frac{x+5}{2}$ **b.** $\frac{x+3}{2}$ **c.** $2x+3$ **ç.** $\frac{x-3}{2}$

**5.** **a.** $-7$ **b.** $3x-13$ **c.** $\frac{8}{3}$ **ç.** $\frac{x+13}{3}$

**6.** **a.** $\frac{6x+8}{3}$ **b.** $\frac{18x+20}{3}$ **c.** $\frac{9x-2}{6}$

**7.** **a.** $\frac{x+5}{2}$ **b.** $\frac{x+11}{8}$ **c.** $8x-11$

**9.** **a.** 2 **b.** $-1$ **c.** 2 **ç.** 0 **d.** 2 **e.** 5

### 2.2 Konu Değerlendirme Soruları

**1.** **a.** 1 – 1, içine **b.** 1 – 1 değil, içine
**c.** 1 – 1, içine

**2.** f ve g bire – bir ve örten fonksiyonlar olması koşuluyla;
**i.** $f=g$ olabilir.
**ii.** $f=g^{-1}$ olabilir.
**iii.** f veya g'den en az biri birim fonksiyon olabilir.

**3.**

| f(x) | g(x) | (fog)(x) |
|---|---|---|
| $x^2$ | $x-1$ | $(x-1)^2$ |
| $\frac{(x-1)^2}{2}+3$ | $2x+1$ | $2x^2+3$ |
| $\frac{2}{4-2x}$ | $\frac{x-2}{x}$ | $\frac{x}{x+2}$ |
| $\sqrt{x}$ | $x^2$ | $\lvert x\rvert$ |

**4.** $-3$

**5.** **a.** Çift fonksiyon **b.** Tek fonksiyon
**c.** Çift fonksiyon **ç.** Çift fonksiyon

**6.**

| f | $f^{-1}$ | $f^{-1}$ nin Tanım ve Görüntü Kümesi |
|---|---|---|
| x | x | $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ |
| $2x+3$ | $\frac{x-3}{2}$ | $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ |
| $\frac{3x+4}{2}$ | $\frac{2x-4}{3}$ | $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ |
| $\frac{3}{2x+5}$ | $\frac{3-5x}{2x}$ | $\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}-\{-\frac{5}{2}\}$ |
| $\frac{3x+2}{2x+1}$ | $\frac{2-x}{2x-3}$ | $\mathbb{R}-\{\frac{3}{2}\}\to\mathbb{R}-\{-\frac{1}{2}\}$ |

**7.** 5

**8.** **a.** $f^{-1}(x)=\sqrt{x-2}$, $x\geq 2$
**b.** $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$, $x\in\mathbb{R}$
**c.** $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$

### 2. Alt Öğrenme Alanı Testi

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1.** B | **2.** C | **3.** C | **4.** E | **5.** D |
| **6.** B | **7.** B | **8.** E | **9.** E | **10.** D |
| **11.** E | **12.** B | **13.** D | **14.** A | **15.** A |
| **16.** C | **17.** C | **18.** D | **19.** A | **20.** E |
| **21.** C | **22.** B | **23.** E | **24.** B | **25.** D |
| **26.** A | **27.** E | **28.** A | **29.** C | **30.** C |
| **31.** A | **32.** E | **33.** C | **34.** D | **35.** E |
| **36.** A | **37.** A | **38.** A | **39.** B | **40.** D |
| **41.** E | | | | |

## 3. ALT ÖĞRENME ALANI

### 3. Alt Öğrenme Alanı için Hazırlık Soruları

**1.** **a.** $2^{19}$ **b.** $3^{11}$ **c.** $-6x^9$
**ç.** $6a^3b^4$ **d.** $\frac{8x^9}{81}$ **e.** 72

**2.** **a.** $3x^3$ **b.** $\frac{3a^2}{4}$ **3.** **a.** $2\pi x^3$ **b.** $2x^3$

**4.** **a.** 10 **b.** 7 **c.** $\frac{25}{4}$ **ç.** 7

**5.** **a.** $x^2-18x+81$ **b.** $4x^2-12x+9$
**c.** $x^2-25$ **ç.** $9x^2-3x-20$

**6.** **a.** $x^2+x+3$ **b.** $x-x^2+1$
**c.** $-x^2+2x+3$ **ç.** $4x^2+2x+3$

**7.** **a.** 8 **b.** 11 **c.** $\frac{2}{10}$ **ç.** $\frac{9}{100}$
**d.** $\frac{6}{25}$ **e.** $\frac{2}{7}$

**8.** **a.** $-\frac{1}{6}$ **b.** $\frac{4}{9}$

## KONU 3.1

### 3.1.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** a, c, d

**2.** a ve ç sabit polinom, b ve e sıfır polinomdur.

**3.**

| | Terim Sayısı | Derecesi | Baş Kat Sayısı | Sabit Terimi |
|---|---|---|---|---|
| **a.** | 3 | 5 | 1/2 | 0 |
| **b.** | 3 | 3 | $-\sqrt{3}$ | 1/2 |
| **c.** | 1 | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{3}$ |
| **ç.** | 2 | 2 | 1 | 0 |

**4.** $a=-3$, $b=1$, $c=-3$, $d=2$, $e=2$

### 3.1.1 Kritik Düşünme

$\text{der}[P(x)+Q(x)]=\text{Max}\{\text{der}[P(x)],\text{der}[Q(x)]\}$ dir.

**Not:** Bu formül $\text{der}[P(x)]=\text{der}[Q(x)]$ iken polinomların başkatsayılarının birbirinin ters işaretlisi olmaması durumunda geçerlidir.

### 3.1.2 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** **a.** $2x^2+4x+6$ **b.** $3x^2+5x+4$
**c.** $-5x^2-7x$
**ç.** $2x^4+7x^3+13x^2+11x+3$
**d.** $x^3+6x^2+9x+2$
**e.** $x^4+4x^3+10x^2+12x+9$

**2.** **a.** $3x^3-x^2+7x+6$
**b.** $x^4+4x^3+2x^2-4x-3$
**c.** $x^3+9x^2+27x+27$

ç. $4x^4 - 4x^3 + 21x^2 - 10x + 25$

d. $16x^4 - 32x^3 + 24x^2 - 8x + 1$

e. $12x^4 - 40x^3 + 7x^2 + 17x - 6$

**3.** a. $4x^2 + 10x + 6$ b. 42

### 3.1.3 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.**

| | Bölüm | Kalan |
|---|---|---|
| a. | $x + 5$ | 6 |
| b. | $x - 7$ | 32 |
| c. | $x^2 + x - 2$ | 0 |
| ç. | $2x^2 - 4x + 7$ | $-14$ |
| d. | $3x^2 + 2x + 1$ | $-4$ |
| e. | $x^2 + 4x + 4$ | 4 |

**2.** a. $x^2 + x - 1 = (x^2 - x + 1) + 2x - 2$

b. $x^4 - 2x^3 + x + 3 = (x^2 - x - 2).(x^2 - x + 1) + 5$

c. $x^3 = x.(x^2 + 3) - 3x$

**3.** $x^4 + 4x^3 - x + 1$

**4.** a. 6 b. 7 c. 8 ç. 28 d. 4 e. 66

### 3.1.4 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** a. 4 b. $-117$

**2.** a. $-3$ b. 1/9 c. 2

**3.** a. 29 b. $-14$ c. 6

**4.** $P(x) = (1 - x).(x + 2)(x - 3)$

**5.** 7

### 3.1 Konu Değerlendirme Soruları

**1.** a. $2x^3 + 6x^2 + 7x + 7$

b. $-x^3 - 3x^2 - 2x + 2$

c. $2x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 + 5x + 2$

ç. $4x^4 + 12x^3 + 13x^2 + 6x + 1$

**2.** a. $2x^3 + 9x^2 + 12x + 4$ b. 175 $br^3$

**3.** $a = -1,\ b = 3,\ c = 5$

**4.** a ⟷ III, b ⟷ V, c ⟷ I, ç ⟷ II

**5.** Bölüm: $x^2 + 3x + 1$, Kalan: 10

**6.** a. 7 dir. b. $-5$ tir.

c. $(x - 4).Q(x) + 3$ tür.

**7.** a. 2 b. 2

**8.** a. 3 b. 1 c. 3

**9.** $a = 1,\ b = -6$

## KONU 3.2

### 3.2.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** a. $6(3x - 2y)$ b. $2m(1 - 7n)$

c. $3x(y - 2 + 6x)$

ç. $2x^2y(y^2 - 7y + 2x)$

d. $6xyz(2y - 3xz)$ e. $2x(x^2 - y - 2z)$

f. $(x + y)(x - 5)$ g. $(x - y)(x - y - 2)$

ğ. $(x + y)(3x - 2y - 1)$

h. $(x - y)[(x - y)(z - x) - 1]$

ı. $(a - 1)(3x - 2)$

i. $x^2(y - 5x)(y - 5x - x^3)$

j. 0

k. $(x - y)(y - 3)(x - y - 1)$

**2.** a. $(x + 3)(x^2 + 5)$ b. $(x^2 + 4)(5x - 3)$

c. $(x + 1)(x - 1)^2$ ç. $(x + 1)(x^2 + 1)$

**3.** a. $(x + z)(y + t)$ b. $(x + a)(x + b)$

c. $(c - d)(a - 4b)$ ç. $(b + 2)(x + a)$

d. $(3x + 1)(2x - 3y)$

e. $x(x + 1)(x^2 - y)$

f. $(a + b)(x - y)$

g. $(ya - xb)(xa + by)$

ğ. $(x + y)(xy - 2)$

h. $(xa + by)(ay - xb)$

ı. $(x^2 + 1)(y^2 + 1)$

i. $(a + 4)(b - 2c + 3d)$

### 3.2.2 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** a. $x^2 - 4x + 4$ b. $4x^2 + 12x + 9$

c. $x^2 - 4xy + 4y^2$ ç. $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{9}$

d. $x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz - yz)$

e. $x^4 + 4x^2 + 9 - 2(2x^3 - 3x^2 + 6x)$

**2.** a. 5 b. $\frac{161}{4}$ **3.** a. 3 b. 73

**4.** 45

**5.** a. $(x - 2)^2$ b. $(3x - 1)^2$

c. $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2$ ç. $\left(\frac{x}{3} - \frac{y^3}{2}\right)^2$

### 3.2.3 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** a. $(x - 5)(x + 5)$ b. $x^2(x - 1)(x + 1)$

c. $\left(\frac{x}{3} - 1\right)\left(\frac{x}{3} + 1\right)$

**2.** a. $(x^2 - y)(x^2 + y)$ b. $2(x - 2y)(x + 2y)$

c. 2600 ç. $4xy$

d. $\left(\frac{x}{8} - \frac{y}{4}\right)\left(\frac{x}{8} + \frac{y}{4}\right)$

e. $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

**3.** a. $(2x - 3y + 1)(2x + 3y + 1)$

b. $(2y - 3x + 1)(2y + 3x - 1)$

c. $x(x - y - 1)(x + y - 1)$

ç. $(x - y - y^2)(x + y - y^2)$

**4.** a. 14375 b. 203 **5.** 18

### 3.2.4 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** a. $27 + 27a + 9a^2 + a^3$

b. $5\sqrt{2} - 7$

c. $8 - 12a^2 + 6a^4 - a^6$

ç. $\frac{27x^3}{8} - \frac{27x^2y}{2} + 18xy^2 - 8y^3$

**2.** 6

**3.** a. $(x - 1)(x^2 + x + 1)$

b. $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$

c. $3x^2(3x + 5)(9x^2 - 15x + 25)$

ç. $(1 - 6x)(1 + 6x + 36x^2)$

d. $\left(3 - \frac{x}{2}\right)\left(9 + \frac{3x}{2} + \frac{x^2}{4}\right)$

e. $\left(\frac{1}{4} - \frac{x}{5}\right)\left(\frac{1}{16} + \frac{x}{20} + \frac{x^2}{25}\right)$

**4.** a. $2(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)$

b. $3x(1 + 2x)(1 - 2x + 4x^2)$

c. $(x + ab)(x^2 - xab + a^2b^2)$

ç. $(x - y - 3)(x^2 - 2xy + y^2 + 3x - 3y + 9)$

d. $2x(x^2 + 3)$

e. $(x + y)(2 - x - y)(4 + 2x + 2y + x^2 + 2xy + y^2)$

**5.** 7 **6.** 3 **7.** 4097

### 3.2.5 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** a. $(x - 3)(x + 1)$ b. $(x - 2)(x + 1)$

c. $(m + 4)(m - 1)$ ç. $(x + 4)(x - 2)$

d. $(x - 4)(x + 3)$ e. $(a + 5)(a - 3)$

**2.** a. $(x-5)(x-1)$ b. $(x-4)(x+2)$
c. $(x-3)(x+2)$ ç. $(x-2)(x-1)$
d. $(x+6)(x-4)$ e. $(x+6)(x-2)$

**3.** a. $(2a-3)(a+4)$ b. $(2y-5)(y+3)$
c. $(2m+3)(m-5)$ ç. $(3x-2)(x+1)$
d. $(2t+5)(t-1)$ e. $(3a+2)(2a-1)$

### 3.2.6 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** a. $(x^2-5)(x^2+4)$
b. $(x-2)(x+2)(x^2+3)$
c. $(x^2-4x+6)(x-3)(x-1)$
ç. $(x-5)(x+2)(x-2)(x-1)$

**2.** a. $(2^x+3)(2^x-2)$
b. $(3^x-3)(3^x+3)(9^x+3)$

### 3.2.2 Kritik Düşünme

$f(x) \neq g(x)$ tir. Çünkü $f(x)$ in tanım kümesi $\mathbb{R}-\{a\}$ iken $g(x)$ in tanım kümesi $\mathbb{R}$'dir.

### 3.2.7 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** a. $\frac{x-6}{x+3}$ b. $\frac{x+y}{x+y+5}$ c. $\frac{a-c}{a+c}$
ç. $a+b$ d. $\frac{x}{x-1}$ e. $x-y$

**2.** a. $\frac{1}{x^2(x+1)}$ b. $\frac{x(x+2)}{(x-2)^2}$ c. $\frac{y-3x}{xy}$
ç. $x$ d. $\frac{x^2}{x+1}$ e. $\frac{x^2-3}{x+1}$
f. 1 g. $xy$

### 3.2.8 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** a. $\frac{1}{2(x+5)}$ b. $\frac{x+6}{2(x+2)}$ c. $\frac{x+5}{3(3x+5)}$
ç. $\frac{1}{4}$ d. $\frac{x-2}{x+2}$ e. $\frac{1}{x(y-x)}$
f. $x-y$ g. $x-1$

**2.** $-6$

### 3.2 Konu Değerlendirme Soruları

**1.** a. $24(a+2b)$ b. $4(x^2+4)$
c. $8(8-5xy)$ ç. $15ab(1+2ab)$
d. $15xy^2(5x+4y)$ e. $6xyz^2(3x-8z)$
f. $(x-y)(z-y)(x-z)$
g. $(a+b)(2a+3b-1)$
ğ. $(x-y)(xz-xy-yz+y^2-1)$
h. $a^3(b-3a)(b-3a-a^2)$
ı. $ab(a+b^2-3ab)$
i. $2(y+1)(9-x)$

**2.** a. $\frac{1}{2}n(n-3)$ b. 27

**3.** a. $2c(a+b+2c)$ b. $2r^2(4-\pi)$

**4.** a. $(x+4)(x+2)$ b. $(2x+3)(x+3)$
c. $2(x-3)(2x+1)$
ç. $(x+1)(x^4+1)$

**5.** a. $(3b-4)(2a+5)$
b. $(3b-4)(2a+5)$
c. $(4x-5y)(3x-4)$
ç. $(x^2+y^2)(x-y+1)$
d. $(2x^2+a^2)(xa+4)$
e. $(2x-a)(3y-b+1)$

**6.** 15 **7.** $(a^y+b^y)(a^x-b^x)$

**8.** a. $(2a^2+1)^2$ b. $a^2(a-1)(a+1)$
c. $(xy-3)^2$ ç. $(3x-2)^2$
d. $3(x-7)(x+7)$
e. $(4-5x)(4+5x)$
f. $2(7x-10y)(7x+10y)$
g. $7(x-2y)(x+2y)$
ğ. $(a-3)(a+3)(a^2+1)$
h. $8x$

**9.** 6. adımda eşitliğin her iki tarafı $a-b$ ile yani 0 ile bölündüğünden hata yapılmıştır.

**10.** $(115-10)(115+10)=13125$

**11.** 9

**12.** $x-2y,\ x+2y,\ xy+5\ (y>0,\ x>2y)$

**13.** $8x^2-28x+\frac{45}{2},\ x>\frac{9}{4}$

**14.** 3 **15.** 5/2

**16.** a. $(x-1)^3$ b. $(2x-3)^3$
c. $(x+1)(x^2-x+1)$
ç. $(3x-2)(9x^2+6x+4)$

**17.** 7 **18.** 95 **19.** 27

**20.** a. $(x+2)(x-1)$ b. $(x+3)(x-1)$
c. $(x+4)(x-2)$ ç. $(x-4)(x+3)$
d. $(t+7)(t-2)$ e. $(m-9)(m+3)$
f. $(3a+2)(a-3)$ g. $(4y+1)(2y-1)$
ğ. $3(n+8)(n+2)$ h. $(3x-1)(x+3)$
ı. $(12m+5)(3m-4)$
i. $(3x+2)(x-1)$

**21.** a. $(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)$
b. $(x-3)(x+2)(x-2)(x+1)$
c. $(3^x+3)(3^x-2)$
ç. $(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)$
d. $(3.3^x+1)(3^x-2)$

**22.** a. $\frac{1}{4(x-1)}$ b. $\frac{x-3}{5x^2}$
c. $\frac{x-2}{x+7}$ ç. $\frac{x^2(2x+5)}{2x-5}$
d. $\frac{x+3}{2x^2(2x-1)}$ e. 1
f. 1

**23.** a. $\frac{32-5x^2}{12x^3}$ b. $\frac{x(5x+31)}{(x-5)(x+2)}$
c. $\frac{5x^2+3x-5}{(5x-3)(6x-5)}$ ç. $\frac{-3x+25}{x(x-7)}$
d. $\frac{3x^2+28x+1}{(x-1)(x+1)(x+7)}$
e. $\frac{5x-7}{(x-3)^2(x+5)}$ f. $-x-1$

### 3. Alt Öğrenme Alanı Testi

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1.** A | **2.** D | **3.** A | **4.** C | **5.** B |
| **6.** C | **7.** D | **8.** A | **9.** C | **10.** A |
| **11.** E | **12.** E | **13.** C | **14.** A | **15.** C |
| **16.** C | **17.** D | **18.** A | **19.** B | **20.** E |
| **21.** C | **22.** E | **23.** C | **24.** C | **25.** B |
| **26.** E | **27.** E | **28.** E | **29.** A | **30.** C |
| **31.** E | **32.** D | | | |

# 4. ALT ÖĞRENME ALANI

## 4. Alt Öğrenme Alanı için Hazırlık Soruları

**1.** a. $Ç = \{-8\}$ b. $Ç = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

**2.** a. $\frac{4}{3}$ **3.** $-5$ **4.** $-4$

**5.** a. $x(x-4)$ b. $3y(3y-1)$
c. $5(x+6y)$ ç. $x(x^4y-1)$
d. $15ay(a-2)$ e. $(5x-7y)(2x-3)$

**6.** a. $(2y-3)^2$ b. $\left(\frac{x}{3}-y\right)^2$
c. $(a+b+1)^2$ ç. $b(a+4b)^2$
d. $2m(m-7)^2$

**7.** a. $(1-x)(1+x)(1+x^2)$
b. $(5-3ab)(5+3ab)$
c. $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\sqrt{7}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{7}\right)\left(\frac{x^2}{2}+7\right)$
ç. $\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{m}\,n}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{m}\,n}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x^2}{3}+\frac{mn^2}{2}\right)$
d. $5(1-2x)$
e. $(3a-b-1)(3a+b-1)$

## KONU 4.1

### 4.1.1 Kritik Düşünme

Yalnız I

### 4.1.2 Kritik Düşünme

Tablonun 5. satırında hata yapılmıştır. Eşitliğin her iki tarafı $x-y$'ye bölünmüştür. $x = y$ dolayısıyla $x-y=0$ olduğundan eşitliğin her iki tarafını 0 ile bölmek ifadeyi tanımsız yapar.

### 4.1.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** a. $a=2,\ b=1,\ c=-1$
b. İkinci dereceden denklem değildir.
c. $a=3,\ b=0,\ c=-4$
ç. İkinci dereceden denklem değildir.
d. İkinci dereceden denklem değildir.
e. $a=4,\ b=1,\ c=0$

**2.** a. $\{-1, 1\}$ b. $\varnothing$ c. $\left\{-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right\}$
ç. $\left\{-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right\}$ d. $\left\{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right\}$
e. $\{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$

**3.** a. $\{0, 1\}$ b. $\{-2, 0\}$ c. $\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$
ç. $\left\{-\frac{1}{4}, 0\right\}$ d. $\left\{0, \frac{2}{3}\right\}$ e. $\left\{-\frac{1}{3}, 1\right\}$

### 4.1.2 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** a. $(2a-7)(a+1)$ b. $(3x-4)(x+2)$
c. $(4b-2)(b-1)$ ç. $(3x+4)(2x-3)$
d. $(4m-1)(m+3)$ e. $(3x-2)(2x+3)$

**2.** a. $\{1, 3\}$ b. $\{-1, 7\}$ c. $\{-2, 3\}$
ç. $\{-5, 1\}$ d. $\{-3, 6\}$ e. $\{-5, 4\}$

**3.** a. $\left\{\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right\}$ b. $\left\{-1, -\frac{2}{7}\right\}$ c. $\{2, 3\}$
ç. $\left\{\frac{1}{4}\right\}$ d. $\left\{-\frac{3}{4}, \frac{2}{3}\right\}$ e. $\left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right\}$

**4.** 15 m/sn., 20 m/sn.

### 4.1.3 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** a. Farklı iki gerçek kökü vardır.
b. Farklı iki gerçek kökü vardır.
c. Gerçek kökü yoktur.
ç. Eşit iki gerçek kökü vardır.
d. Eşit iki gerçek kökü vardır.
e. Gerçek kökü yoktur.

**2.** a. $\{2\}$ b. $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ c. $\left\{\frac{1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right\}$
ç. $\left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ d. $\{-1-2\sqrt{2}, -1+2\sqrt{2}\}$
e. $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

### 4.1.4 Öğrendiğimizi Uygulayalım

a. $Ç = \{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$

b. $Ç = \{1, 2\}$

c. $Ç = \{-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\}$

### 4.1.3 Kritik Düşünme

$\sqrt{-2}\,.\,\sqrt{3} = i\sqrt{2}\,\sqrt{3} = i\sqrt{6}$ ve $i\sqrt{6} \neq \sqrt{6}$ olduğundan Euler'in iddiası yanlıştır.

### 4.1.5 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** a. $3i$ b. $\frac{i}{2}$ c. $\sqrt{5}i$
ç. $4\sqrt{3}i$ d. $10\sqrt{3}i$

**2.**

| | Gerçek Kısım | Sanal Kısım | | Gerçek Kısım | Sanal Kısım |
|---|---|---|---|---|---|
| a. | 3 | $-8$ | b. | $-4$ | 1/2 |
| c. | 0 | $-\sqrt{3}$ | ç. | $-1$ | $\sqrt{3}$ |
| d. | 0 | 15 | e. | $-2/3$ | 4/7 |
| f. | 3/2 | $-7/2$ | g. | 1/4 | $3\sqrt{5}/4$ |

**3.** a. $\{-3i, 3i\}$ b. $\{-\sqrt{7}i, \sqrt{7}i\}$
c. $\{-5i, 5i\}$ ç. $\{1-i, 1+i\}$
d. $\{2-3i, 2+3i\}$
e. $\left\{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right\}$

### 4.1.6 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** a. $-1, -12$ b. $\frac{7}{4}, \frac{1}{2}$ c. $\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}$
ç. $\frac{4}{3}, 0$ d. $-m-1, -3$
e. $\frac{1}{m}, \frac{3m-3}{2m}$

**2.** a. 112 b. $-\frac{1}{2}$

**3.** $-\frac{1}{3}$ **4.** a ↔ IV, b ↔ V, c ↔ III

**5.** $x^2 - 8x + 4 = 0$

### 4.1 Konu Değerlendirme Soruları

**1.** 5 **2.** 3

**3.** a. $\{-3, 3\}$ b. $\{0\}$ c. $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$
ç. $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ d. $\varnothing$ e. $\{-3\sqrt{5}, 3\sqrt{5}\}$

**4.** a. $\{0, 5/3\}$ b. $\{-1, 0\}$ c. $\{0, 3\}$
ç. $\{0, 3/5\}$ d. $\{0, 1/3\}$ e. $\{0, 12\}$

**5.** a. $\{-5, -2\}$ b. $\{-4, -3\}$ c. $\{2\}$
ç. $\{1, 5\}$ d. $\{7\}$ e. $\{-2, 7\}$
f. $\{-3, 2\}$ g. $\{1/3, 2\}$ ğ. $\{-1/3, 1\}$
h. $\{2, 3\}$ ı. $\{-1/2, 1\}$ i. $\{-5, -1/4\}$

**6.** **a.** Ç = {−1, 1}

**b.** Ç = {−2, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 2}

**c.** Ç = {−2, −1, 1, 2}

**ç.** Ç = {−2, −1, 3, 4}

**7.** **a.** $x_{1,2} = \dfrac{-b \mp \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ / $b^2 - 4ac$

**b.** sıfırdan büyük / sıfıra eşit / sıfırdan küçüktür.

**8.** **a.** $\{-3 \mp \sqrt{2}\}$ **b.** $\left\{\dfrac{1 \mp \sqrt{5}}{2}\right\}$

**c.** $\left\{\dfrac{-5 \mp \sqrt{29}}{2}\right\}$ **ç.** $\left\{\dfrac{1 \mp \sqrt{7}}{2}\right\}$

**d.** $\left\{\dfrac{1 \mp \sqrt{37}}{2}\right\}$ **e.** $\left\{\dfrac{5 \mp \sqrt{13}}{2}\right\}$

**f.** ∅ **g.** $\left\{\dfrac{1 \mp \sqrt{13}}{6}\right\}$

**ğ.** $\left\{-4, \dfrac{1}{2}\right\}$ **h.** $\left\{\dfrac{1 \mp \sqrt{7}}{2}\right\}$

**9.** −14 ile −12 veya 12 ile 14

**10.** E **11.** 0

**12.** **a.** $\{\mp\sqrt{7}\,i\}$ **b.** $\left\{\mp\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i\right\}$

**c.** $\{-3 \mp 4i\}$ **ç.** $\left\{\dfrac{3 \mp i}{2}\right\}$

**d.** $\{2 \mp 3i\}$ **e.** $\{5 \mp 2i\}$

**f.** $\{\sqrt{3} \mp i\}$ **g.** $\left\{\dfrac{1 \mp \sqrt{7}\,i}{4}\right\}$

**ğ.** $\left\{\dfrac{1+(2-\sqrt{15})i}{2}, \dfrac{1+(2+\sqrt{15})i}{2}\right\}$

**13.** **a.** 7/5 **b.** −4

**14.** **a.** −1 **b.** 6

**15.** **a.** −10 **b.** −6 **c.** 3 **ç.** −5 **d.** 4 **e.** $\frac{7}{3}$ veya 5 **f.** −1, 7 **g.** 3 **ğ.** 1/2 veya 2

**16.** $x^2 - 3x - 4 = 0$ **17.** $3x^2 - 30x + 31 = 0$

**18.** 0 **19.** 5 cm, 8 cm

**20.** 48 **21.** 4 cm, 7 cm

### 4. Alt Öğrenme Alanı Testi

**1.** B **2.** D **3.** B **4.** A **5.** E

**6.** D **7.** C **8.** A **9.** E **10.** D

**11.** C **12.** D **13.** A **14.** A **15.** C

**16.** B **17.** B

## 5. ALT ÖĞRENME ALANI

### 5. Alt Öğrenme Alanı için Hazırlık Soruları

**1.** **a.** 65 **b.** 130 **c.** 125 **ç.** 130

**2.** **a.** 60 **b.** 40 **c.** 40 **ç.** 36

**3.** **a.** 8 **b.** 6 **c.** 6 **ç.** 6

**4.** **a.** 24 **b.** $6\sqrt{6}$ **c.** $12\sqrt{3}$ **ç.** $4\sqrt{3}$

**5.** **a.** 6 **b.** 1 **c.** 6 **ç.** 7

**6.** **a.** $9\sqrt{3}$ **b.** 8 **c.** 48 **ç.** 40

## KONU 5.1

### 5.1.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** **a.** 100 **b.** 120 **c.** 70

**2.** **a.** 36 **b.** 18 **c.** 64

**3.** **a.** 60 **b.** 120 **c.** 75

**4.** **a.** 12 **b.** 18 **c.** 9

### 5.1 Konu Değerlendirme Soruları

**1.**

| Düzgün Çokgenin Sayısı | Bir İç Açısının Ölçüsü | Bir Dış Açısının Ölçüsü |
|---|---|---|
| 4 | 90° | 90° |
| 5 | 108° | 72° |
| 6 | 120° | 60° |
| 8 | 135° | 45° |
| 10 | 144° | 36° |

**2.** **a.** D **b.** D **c.** Y **ç.** D

**3.** 150 **4.** **a.** 15 **b.** 160

**5.** Öğrenci yorumuna bağlı.

**6.** Öğrenci yorumuna bağlı.

**7.** 120 **8.** 22

## KONU 5.2

### 5.2.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** **a.** 80° **b.** 57° **c.** 90°

**2.** **a.** 95° **b.** 161° **c.** 20°

**3.** **a.** 7 **b.** $3\sqrt{5}$

**4.** **a.** 18 **b.** 13

### 5.2 Konu Değerlendirme Soruları

**1.** **a.** 90 **b.** 55 **c.** 110 **ç.** 80

**2.** **a.** 70 **b.** 15 **c.** 40 **ç.** 120

**3.** **a.** $2\sqrt{5}$ **b.** $\sqrt{13}$ **c.** 8 **ç.** $2\sqrt{3}$

**4.** **a.** 40 **b.** 80 **c.** 12

**5.** $\frac{5}{8}$ **6.** **a.** 28 **b.** 48

## KONU 5.3

### 5.3.1 Kritik Düşünme

$\dfrac{2.a.c}{a+c}$

### 5.3.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** **a.** 50° **b.** 40°

**2.** **a.** 20 **b.** 8

**3.** **a.** 10 **b.** 1

**4.** **a.** 6 **b.** 6

**5.** **a.** $4\sqrt{3}$ **b.** 3

**6.** **a.** 8 **b.** 9

### 5.3.2 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** **a.** 80 **b.** 100

**2.** **a.** 756/5 **b.** $18\sqrt{6}$

**3.** **a.** 36 **b.** 25

**4.** **a.** 36 **b.** 96

### 5.3.3 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** **a.** 8 **b.** 2

**2.** **a.** 60° **b.** 36°

**3.** **a.** 16 **b.** 7

**4.** **a.** 6 **b.** 4

**5.** **a.** 4 **b.** 5

### 5.3.4 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** **a.** 9 **b.** 48

**2.** **a.** 18 **b.** 24

**3.** **a.** 40 **b.** 9

**4.** **a.** 22 **b.** 48

### 5.3.2 Kritik Düşünme

$6\sqrt{3}$

### 5.3.5 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** **a.** 50° **b.** 35°

**2.** **a.** 5 **b.** $4\sqrt{5}$

### 5.3.6 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** **a.** 156 **b.** 24

**2.** **a.** 16 **b.** $32\sqrt{3}$

### 5.3.7 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** **a.** 54° **b.** 54°

**2.** **a.** 10 **b.** $6\sqrt{6}$

**3.** **a.** $\sqrt{3}$ **b.** $\frac{21}{4}$

**4.** **a.** $\frac{26}{3}$ **b.** 5

### 5.3.3 Kritik Düşünme

4,8

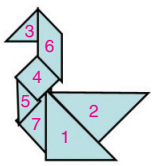
### 5.3.8 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** 18 **2.** **a.** $16\sqrt{3}$ **b.** 54

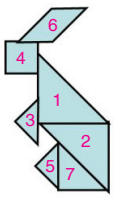
**3.** **a.** 32 **b.** 16

### 5.3.4 Kritik Düşünme

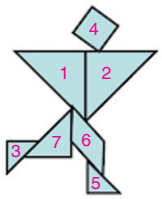
**a.**




**b.**




**c.**




### 5.3.9 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** **a.** 45° **b.** 120°

**2.** **a.** 5 **b.** $\frac{32}{5}$

### 5.3.10 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** **a.** 80 **b.** 72 **c.** $24+12\sqrt{3}$

**2.** **a.** 16 **b.** 16

### 5.3.11 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** **a.** Y **b.** Y **c.** Y **ç.** D

**2.** 91° **3.** $\sqrt{61}$ **4.** 45° **5.** 140

### 5.3.12 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.** A: yamuk, D: deltoid, E: paralelkenar, F: dikdörtgen, H: eşkenar dörtgen, K: kare

**2.** **a.** 168 **b.** 36 **c.** $16\sqrt{2}$

**3.** **a.** 8 **b.** 68

### 5.3 Konu Değerlendirme Soruları

**1.** a – V b – III b – V c – II c – III
c – IV c – V ç – I d – II d – V

**2.**

| | Paralelkenar | Dikdörtgen | Eşkenar Dörtgen | Deltoid |
|---|---|---|---|---|
| Karşılıklı kenar uzunlukları eşittir. | ✓ | ✓ | ✓ | |
| Köşegenleri birbirini ortalar. | ✓ | ✓ | ✓ | |
| Açıları diktir. | | ✓ | | |
| Köşegenleri eşit uzunluktadır. | | ✓ | | |
| Ağırlık merkezi köşegenlerin kesim noktasıdır. | ✓ | ✓ | ✓ | |

**3.** **a.** Y **b.** D **c.** D **ç.** Y

**4.** $6\sqrt{2}+2\sqrt{6}$

**5.** $\frac{7}{6}$

**6.** 8

**7.** $10\sqrt{2}$

**8.** 363

**9.** $\frac{75}{4}$

**10.** **a.** $\frac{1}{4}$ **b.** $\frac{3}{8}$ **c.** $\frac{1}{2}$ **ç.** $\frac{2}{3}$ **d.** $\frac{1}{3}$ **e.** $\frac{1}{5}$

**11.** Öğrenci yorumuna bağlı.

### 5. Alt Öğrenme Alanı Testi

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1.** C | **2.** B | **3.** A | **4.** B | **5.** D |
| **6.** B | **7.** C | **8.** C | **9.** E | **10.** A |
| **11.** E | **12.** B | **13.** E | **14.** A | **15.** D |
| **16.** D | **17.** D | **18.** D | **19.** B | **20.** C |
| **21.** D | **22.** A | **23.** E | **24.** B | **25.** C |
| **26.** A | **27.** C | **28.** E | **29.** B | **30.** A |
| **31.** B | **32.** C | **33.** D | **34.** E | **35.** C |
| **36.** C | **37.** C | **38.** D | **39.** D | **40.** A |
| **41.** D | **42.** C | **43.** D | **44.** D | **45.** A |
| **46.** C | **47.** D | **48.** C | | |

# 6. ALT ÖĞRENME ALANI

### 6. Alt Öğrenme Alanı için Hazırlık Soruları

**1.** **a.** 20 **b.** 16 **c.** 18 **ç.** 24

**2.** **a.** 24 **b.** 25 **c.** $9\sqrt{3}$ **ç.** 48

**3.** **a.** 5 **b.** 5

**4.**

| | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| Cismin Adı | Küp | Üçgen Prizma | Kare Piramit | Üçgen Piramit |
| Ayrıt Sayısı | 12 | 9 | 8 | 6 |
| Yanal Yüz Sayısı | 4 | 3 | 4 | 3 |
| Köşe Sayısı | 8 | 6 | 5 | 4 |

**5.** **a.** Kare **b.** Kare
**c.** Dikdörtgen **ç.** Altıgen

## KONU 6.1

### 6.1.1 Öğrendiğimizi Uygulayalım

**1.**

| | Yanal Alanı | Yüzey Alanı | Hacmi |
|---|---|---|---|
| **a.** | 144 | $144+18\sqrt{3}$ | $72\sqrt{3}$ |
| **b.** | 84 | 108 | 72 |
| **c.** | 144 | 216 | 216 |

**2.** 64

**3.** **a.** Yüzey alanı değişmez, hacmi 1 $cm^3$ azalır.
**b.** Yüzey alanı 2 $cm^2$ artar, hacmi 1 $cm^3$ azalır.
**c.** Yüzey alanı 4 $cm^2$ artar, hacmi 1 $cm^3$ azalır.

**4.** 0,08 **5.** **a.** 192 **b.** 288 **c.** 144

**6.** **a.** 1280 **b.** $\frac{250\sqrt{2}}{3}$ **c.** 1728

### 6.1 Konu Değerlendirme Soruları

**2.** 60 **3.** 296 **4.** 8 $cm^2$ azalır.

**5.** 5 **6.** 400 **7.** $18\sqrt{2}$

### 6. Alt Öğrenme Alanı Testi

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1.** C | **2.** E | **3.** B | **4.** C | **5.** B |
| **6.** A | **7.** E | **8.** D | **9.** E | **10.** A |
| **11.** A | **12.** C | **13.** D | **14.** C | **15.** C |
| **16.** D | **17.** B | **18.** D | **19.** D | **20.** B |

**1.** *Analitik geometri 2 ders notu.* (2009). Ankara: MEB Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü Yayınları.

**2.** Barnett, R. A. vb. (2001). *Precalculus: functions and graphs.* New York: McGraw – Hill.

**3.** Blitzer, R. (2003). *Thinking mathematically.* New Jersey: Prentice Hall.

**4.** Boll, M. (2004). *Matematik tarihi.* İstanbul: İletişim Yayınevi.

**5.** Boyd, C. vb. (2008). *Geometry.* New York: Glencoe McGraw – Hill.

**6.** Cajori, F. (1929). *A history of mathematical notations (2 volumes).* Illinois: The Open Court Publishing.

**7.** Göker, L. (1997). *Matematik tarihi ve Türk – İslam matematikçilerinin yeri.* İstanbul: MEB Yayınları.

**8.** Haese, R. vb. (2002). *Mathematics for year 10.* Marleston: Haese & Harris Publications.

**9.** Holliday, B. vb. (2005). *Algebra 1.* New York: Glencoe McGraw-Hill.

**10.** Karakaş, H. (1979). *Asma sistemler.* İstanbul: İTÜ Mimarlık Fakültesi Yayınları.

**11.** Katz, V. J. (1993). *A history of mathematics: an introduction.* New York: Harper Collins College Publishers.

**12.** Larson, R. vb. (1998). *Geometry: an integrated approach.* New York: McDougal Littell.

**13.** Lynch, C. vb. (2006). *Mathmatters 2.* New York: Glencoe / McGraw – Hill.

**14.** Schlager, N. ve Lauer, J. (2001). *Science and its times.* Hampshire: Gale Group.

**15.** *T.C. Millî Eğitim Bakanlığı matematik dersi öğretim programı (ortaöğretim 9, 10, 11 ve 12. sınıflar).* (2018). Ankara: MEB Yayınları.

**16.** *T.C. Millî Eğitim Bakanlığı matematik dersi öğretim programı (ilkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar).* (2018). Ankara: MEB Yayınları.

**17.** Thomas, G. B. vb. (2005). *Thomas' calculus.* New York: Pearson Education.

**18.** Yee, L. P. vb. (2004). *New syllabus mathematics 1.* Singapore: Shinglee.

✳ *Kaynakça düzenlenirken Apa atıf sistemi 6. sürüm kullanılmıştır.*

## GENEL AĞ KAYNAKÇASI

**1.** https://istatistik.yok.gov.tr/ (Erişim Tarihi: 09.06.2023 Kullanıldığı Sayfa: 3)

**2.** http://tuik.gov.tr/PreTablo.do?alt_id=1095Olasılık (Erişim Tarihi: 09.06.2023 Kullanıldığı Sayfa: 7)

**3.** https://services.tubitak.gov.tr/edergi/yazi.pdf;jsessionid=+0oQ1qrd+ZH68p64Kb++n-Ki?dergiKodu=4&cilt=49&sayi=911&sayfa=50&yaziid=389234. (Erişim Tarihi: 09.06.2023 Kullanıldığı Sayfa: 9)

**4.** http://web.deu.edu.tr/mate-matik/m9.html (Erişim Tarihi: 09.06.2023 Kullanıldığı Sayfa: 30)

**5.** https://plato.stanford.edu/entries/cardano/ (Erişim Tarihi: 09.06.2023 Kullanıldığı Sayfa: 40)

**6.** https://plato.stanford.edu/entries/al-kindi/ (Erişim Tarihi: 09.06.2023 Kullanıldığı Sayfa: 42)

**7.** https://zhjbkz.ahmu.edu.cn/article/doi/10.16462/j.cnki.zhjbkz.2019.05.025?pageType=en (Erişim Tarihi: 09.06.2023 Kullanıldığı Sayfa: 44)

**8.** http://www.birecik.gov.tr/kelaynak-kuslari3 (Erişim Tarihi: 09.06.2023 Kullanıldığı Sayfa: 82)

**9.** https://data.tuik.gov.tr/Bulten/Index?p=Nufus-Projeksiyonlari-2013-2075-15844/ (Erişim Tarihi: 06.06.2023 Kullanıldığı Sayfa: 98)

**10.** https://avys.omu.edu.tr/storage/app/public/erol.dogan/76325/hafta-11%20Kayak%20tarihi.pptx (Erişim Tarihi: 09.06.2023 Kullanıldığı Sayfa: 136)

**11.** https://dnalc.cshl.edu/view/16151-Biography-1-Gregor-Mendel-1822-1884-.html (Erişim Tarihi: 09.06.2023 Kullanıldığı Sayfa: 147)

**12.** https://users.metu.edu.tr/serge/courses/303-2015/Book-essentials-A4.pdf (Erişim Tarihi: 09.06.2023 Kullanıldığı Sayfa: 178)

**13.** http://www.katihal.sakarya.edu.tr/Bilimciler/harezmi.htm (Erişim Tarihi: 09.06.2023 Kullanıldığı Sayfa: 178)

**14.** https://e-dergi.tubitak.gov.tr/edergi/yazi.pdf;jsessionid=ovxf8lPH7h1Hp3xPIY2qR96J?dergiKodu=4&cilt=45&sayi=762&sayfa=90&yaziid=32845 (Erişim Tarihi: 09.06.2023 Kullanıldığı Sayfa: 184)

**15.** https://bilimgenc.tubitak.gov.tr/makale/bilinen-ilk-irrasyonel-sayi-olan-karekok-iki-sayisi-nasil-kesfedildi (Erişim Tarihi: 09.06.2023 Kullanıldığı Sayfa: 188)

**16.** https://acikders.ankara.edu.tr/pluginfile.php/198024/mod_resource/content/3/fiz202_1.hafta.pdf (Erişim Tarihi: 09.06.2023 Kullanıldığı Sayfa: 189)

**17.** http://users.wfu.edu/kuz/Stamps/Gauss/Gauss.html (Erişim Tarihi: 09.06.2023 Kullanıldığı Sayfa: 191)

**18.** http://www.baskent.edu.tr/~tkaracay/etudio/agora/makale/satranc.html (Erişim Tarihi: 09.06.2023 Kullanıldığı Sayfa: 260)

**19.** http://sozluk.gov.tr

## GÖRSEL KAYNAKÇA GÖRSEL KAYNAKÇA GÖRSEL K

**1.** Kitabımızdaki "http://www.shutterstock.com" adresinden satın alınan görsellerin sayfa numaraları ve görsel kodları aşağıda verilmiştir.

**Sayfa 1/1:** 123013060,
**1/2:** 63123109,
**1/3:** 96263711,
**1/4:** 102422170

**Sayfa 9**: 123704233

**Sayfa 12**: 675591121

**Sayfa 14**: 52241188

**Sayfa 24**: 17683108

**Sayfa 40**: 1755936461

**Sayfa 44**: 110032946

**Sayfa 56/1**: 1533106,
**56/2:** 125993348,
**56/3:** 159411446,
**56/4:** 141265654

**Sayfa 58/1**: 124072192,
**58/2:** 122591407,
**58/3:** 45531217

**Sayfa 69**: 47653096

**Sayfa 72**: 133421273

**Sayfa 81**: 123345523

**Sayfa 82**: 70561228

**Sayfa 93**: 96776542

**Sayfa 102**: 1189679005

**Sayfa 123/1**: 139451864,
**123/2:** 154607213,
**123/3:** 646878214,
**123/4:** 89472775

**Sayfa 174/1**: 150529394,
**174/2:** 98985119,
**174/3:** 140977573,
**174/4:** 120608623

**Sayfa 176**: 44962

**Sayfa 188**: 125333273

**Sayfa 201/1**: 129385973,
**201/2:** 138221339,
**201/3:** 67490044,
**201/4:** 54355477

**Sayfa 203**: 145372948

**Sayfa 207**: 1079566205

**Sayfa 216/1**: 562927264,
**216/2:** 68982415

**Sayfa 227**: 52255990

**Sayfa 240**: 184758305

**Sayfa 260**: 141445228

**Sayfa 284/1**: 82074544,
**284/2:** 163289705,
**284/3:** 231373774,
**284/4:** 678431956

**Sayfa 289**: 565601797

**Sayfa 292**: 446970

**2.** Kitabımızdaki kaynağı belirtilmeyen görseller yayınevimizin arşivine aittir.

**3.** Kitabımızdaki çizimler yayınevimizin görsel tasarım uzmanı tarafından çizilmiştir.

# Bu kitaba sığmayan daha neler var!

Karekodu okut, bu kitapla ilgili EBA içeriklerine ulaş!

Google play | App Store

ISBN 978-6256412231
9 786256 412231

**BU DERS KİTABI MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞINCA ÜCRETSİZ OLARAK VERİLMİŞTİR.**
**PARA İLE SATILAMAZ.**

*Bandrol Uygulamasına İlişkin Usul ve Esaslar Hakkında Yönetmeliğin Beşinci Maddesinin İkinci Fıkrası Çerçevesinde Bandrol Taşıması Zorunlu Değildir.*